1879

218

Alexander Ziwet 10.5

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ

ВЫСШИХЪ РОДОВЪ.

L K Lakhtin

Л. К. Лахтина.

МОСКВА.

Университетская типографія, Страст. бульваръ.

1897.

Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.
Математическій Сборникъ, Т. XIX

Prof. Alex. Ziwet
1-19-1923

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ РОДОВЪ.

Л. К. Лахтина.

(Читано въ засѣданіяхъ Математическаго общества 19 декабря 1895 года и 19 марта 1896 года).

ВВЕДЕНІЕ.

Вопросъ о рѣшеніи алгебраическихъ уравненій есть одинъ изъ древнѣйшихъ вопросовъ математическаго анализа. Надъ нимъ потрудились самые выдающіеся математики многихъ вѣковъ и, не смотря на то, теорія алгебраическихъ уравненій осталась значительно позади другихъ областей анализа.

Такая медленность въ развитіи теоріи отчасти обусловливалась тѣмъ, что до появленія знаменитаго изслѣдованія Абеля (въ 1824 году) усилія математиковъ въ области алгебры были направлены къ нахожденію рѣшенія уравненій *въ радикалахъ*.

Благодаря Абелю и Галуа стало ясно, что область уравненій, разрѣшимыхъ въ радикалахъ, очень не велика. Появились попытки ввести въ алгебру новыя функціи, отличныя отъ радикаловъ и позволяющія расширить область разрѣшимыхъ уравненій.

Однако и при такомъ болѣе широкомъ взглядѣ на сущность дѣла рѣшеніе алгебраическаго уравненія представляетъ задачу трудную.

Дѣло въ томъ, что корень алгебраическаго уравненія общаго вида есть *функція многихъ перемѣнныхъ*, служащихъ коэффиціентами уравненія. Теорія функцій многихъ перемѣнныхъ сложна и очень мало разработана.

Поэтому прежде, чѣмъ приступить къ рѣшенію уравненія, обыкновенно стараются упростить его такъ, чтобы число коэффиціентовъ уменьшилось. (Таково, напримѣръ, упрощеніе Жеррарда въ уравненіи 5-ой степени).

Иногда дѣлаютъ предметомъ изслѣдованія отдѣльные классы уравненій, содержащихъ въ себѣ только одинъ параметръ (уравненія трехчленныя и модулярныя).

Во всякомъ случаѣ, желая рѣшить уравненіе помощью новыхъ функцій, невыразимыхъ въ радикалахъ, мы должны стараться выбрать эти функціи такъ, чтобы онѣ зависѣли только отъ одного аргумента.

Пусть намъ дано алгебраическое уравненіе

$$F(y, a, b, c, \ldots, k, l)=0, \tag{I}$$

гдѣ y есть неизвѣстная величина, а

$$a, b, c, \ldots k, l \tag{II}$$

суть перемѣнные параметры.

Обозначимъ символами

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots,\ u_{m-1}(x) \tag{III}$$

систему m—1 функцій, обладающихъ слѣдующими свойствами.

1) Функціи (III) суть вполнѣ опредѣленныя и извѣстныя намъ алгебраическія функціи перемѣннаго x, невыразимыя въ радикалахъ. Онѣ могутъ быть выражены или въ въ видѣ рядовъ или черезъ интегралы данныхъ дифференціальныхъ уравненій или еще какими либо иными способами.

2) Величины функцій (III) не зависятъ отъ величинъ параметровъ (II). Онѣ опредѣляются только величиною аргумента x.

Пусть намъ удалось выразить корни уравненія (I) формулою:

$$y=f[a, b, c, \ldots, k, l, u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots,\ u_{m-1}(x)], \tag{IV}$$

гдѣ f есть символъ функціи раціональной или ирраціональной выразимой въ радикалахъ, а x выражается формулой:

$$x=R(a, b, c \ldots, k, l), \tag{V}$$

при чемъ R есть тоже символъ функціи раціональной или ирраціональной, выразимой въ радикалахъ.

Ясно, что формулу (IV) можно назвать формулою рѣшенія уравненія въ томъ же самомъ смыслѣ, въ какомъ напримѣръ Карданова формула называется формулою рѣшенія кубичнаго уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, величины (III) суть функціи одного аргумента такъ же точно, какъ и радикалы. Видъ ихъ опредѣляется не величиною коэффиціентовъ (II), а степенью и свойствами уравненія (I) такъ же точно, какъ и показатели степени радикаловъ въ формулѣ рѣшенія уравненія въ радикалахъ. Величины (III) представляютъ тѣ новые элементы, которые позволяютъ намъ рѣшить уравненіе (I) *при всевозможныхъ значеніяхъ буквенныхъ коэффиціентовъ*.

На сколько мнѣ извѣстно, такой методъ рѣшенія алгебраическаго уравненія въ явной формѣ не былъ изложенъ въ математической литературѣ. Но всмотрѣвшись внимательно въ Клейново рѣшеніе уравненія 5-ой степени, нельзя не замѣтить, что оно какъ разъ подходитъ подъ указанную выше формулу (IV).

Припомнимъ въ общихъ чертахъ Клейново рѣшеніе уравненія 5-ой степени *).

Сначала приведемъ уравненіе къ виду

$$y^5+5\alpha y^2+5\beta y+\gamma=0; \tag{1}$$

(при этомъ въ коэффиціенты можетъ войти только одинъ квадратный радикалъ). Величины

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \tag{2}$$

суть параметры совершенно произвольные

Возьмемъ затѣмъ гипергеометрическое уравненіе

$$x(x-1)\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{1}{6}(7x-4)\frac{d\eta}{dx}-\frac{11}{3600}\eta=0.$$

Его интегралы суть функціи только одного перемѣннаго x.

---

*) См. *Klein*. Vorlesungen über das Ikosader und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Abschnitt II. Kapitel III.

Лахтинъ. Алгебраическія уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Глава XI. (Математическій сборникъ. томъ XVII, выпускъ 1).

Выберемъ опредѣленнымъ образомъ два изъ этихъ интеграловъ и обозначимъ отношеніе ихъ символомъ:

$$u(x). \tag{3}$$

Это — вполнѣ опредѣленная функція одного аргумента x, принадлежащая къ числу Шварцевыхъ функцій.

Для краткости будемъ обозначать ее одною буквою u.

Корни уравненія (1) выразятся формулою:

$$y=12\,\frac{(u^{11}+11u^6-u)(u^8-u^7+7u^6+7u^5-7u^3+7u^2+u+1)}{u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1}\times$$

$$\times\left\{h+12k\,\frac{(u^{11}+11u^6-u)^2(u^6+2u^5-5u^4-5u^2-2u+1)}{(u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-622u^5+1}\right\}, \tag{4}$$

гдѣ величина аргумента x функціи $u=u(x)$ такова:

$$x=\frac{(48\alpha h^2-12\beta h-\gamma)^3}{64\alpha^2(12\alpha\gamma h-12\beta^2 h-\beta\gamma)}. \tag{5}$$

Буквами h и k для краткости обозначены слѣдующія выраженія:

$$h=\frac{11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2\pm\alpha\sqrt{\Delta}}{24(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)},$$

$$k=-\frac{96\alpha h^3+72\beta h^2+6\gamma h-12\alpha^2 x}{144\alpha h^2+12\beta h+\gamma}.$$

$$\Delta=108\alpha^5\gamma-135\alpha^4\beta^2+90\alpha^2\beta\gamma^2-320\alpha\beta^3\gamma+256\beta^5+\gamma^4.$$

Ясно, что формулы (1), (2), (3), (4) и (5) совершенно соотвѣтствуютъ приведеннымъ выше формуламъ (I), (II) (III), (IV) и (V). Число $m-1$ функцій (III) для уравненія 5-ой степени равно единицѣ.

Тотъ же характеръ имѣютъ формулы рѣшенія всѣхъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ *). Къ числу ихъ относятся уравненія 3-ей, 4-ой, 5-ой степени общаго вида, Якобіево уравненіе 6-ой степени и всѣ тѣ алгебраическія

---

*) См. *Лахтинъ*. Алгебраическія уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Глава IX.

уравненія, которыя могутъ быть преобразованы въ только что перечисленныя уравненія.

Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ функція, позволяющая рѣшить уравненіе, есть функція Шварца и имѣетъ видъ отношенія двухъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія. Каждое изъ этихъ гипергеометрическихъ уравненій, или *резольвентъ* принадлежитъ къ одному изъ четырехъ типовъ: икосаэдрическому, октаэдрическому, тетраэдрическому или двупирамидному. Степень и свойства разрѣшаемаго алгебраическаго уравненія опредѣляютъ только *типъ* резольвенты, но не ея коэффиціенты, такъ какъ коэффиціенты резольвенты каждаго типа суть опредѣленныя постоянныя числа.

Отсюда видно, что приведенный выше методъ примѣнимъ къ цѣлому классу уравненій.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я задался цѣлью распространить тотъ же методъ рѣшенія на другіе виды алгебраическихъ уравненій по возможности близко слѣдуя тому же пути, по какому я шелъ въ своей работѣ: «Алгебраическія уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ».

Для болѣе удобнаго приложенія теоріи функцій, съ самаго начала я выдѣляю одинъ изъ буквенныхъ коэффиціентовъ, считаю его за независимое перемѣнное и обозначаю буквою x. Остальные коэффиціенты (II) я разсматриваю, какъ *произвольные*, но *постоянные* параметры.

Уравненіе (I) представится въ видѣ

$$\Phi(y, x)=0, \qquad \text{(I')}$$

гдѣ въ *коэффиціенты* функціи Φ входятъ всѣ величины (II) кромѣ x.

Изъ теоріи Римановыхъ поверхностей извѣстно, что эти поверхности дѣлятся на роды, смотря по числу сѣченій, превращающихъ каждую поверхность въ односвязную.

Родъ поверхности мы будемъ обозначать буквою p.

Родомъ алгебраическаго уравненія (I′) называется родъ соотвѣтствующей ему Римановой поверхности.

Тѣ пріемы, которыми мы будемъ пользоваться въ изслѣдованіи, примѣнимы только къ уравненіямъ *высшихъ* родовъ, то есть къ такимъ уравненіямъ, родъ которыхъ не ниже 2. На это указываетъ заглавіе работы.

Надо однако замѣтить, что иногда алгебраическое уравненіе нисшаго рода преобразуется въ такое уравненіе высшаго рода, которое разрѣшимо предлагаемыми методами. Тогда эти методы даютъ рѣшеніе уравненія нисшаго рода. Такіе случаи мы встрѣтимъ въ главахъ VII и VIII отдѣла II.

Функціями (III) въ моемъ изслѣдованіи служатъ отношенія интеграловъ дифференціальнаго уравненія m-го порядка съ алгебраическими интегралами. Эти дифференціальныя уравненія я называю *дифференціальными резольвентами* алгебраическихъ уравненій.

Функціи (III) являются естественнымъ обобщеніемъ функцій Шварца. Когда функція Шварца – алгебраическая, то она служитъ корнемъ уравненія инваріантнаго относительно линейныхъ неоднородныхъ подстановокъ одного перемѣннаго, составляющихъ группу этого уравненія.

Функціи (III) въ настоящей работѣ служатъ корнями системы $m - 1$ уравненій, инваріантныхъ относительно группы линейныхъ неоднородныхъ подстановокъ $m - 1$ перемѣнныхъ. Такія системы уравненій я называю *основными системами уравненій*. Онѣ представляютъ обобщеніе Шварцевыхъ уравненій и уже встрѣчаются въ работахъ Клейна и Дика *).

Въ отдѣлѣ I своей работы я не налагаю на коэффиціенты дифференціальной резольвенты указаннаго выше 2-го условія: они могутъ быть функціями не только перемѣннаго x, но и остальныхъ параметровъ (II).

Въ отдѣлѣ II я примѣняю общую теорію къ нахожденію дифференціальныхъ резольвентъ 3-го порядка. При этомъ оказывается, что эти дифференціальныя резольвенты имѣютъ въ коэффиціентахъ только одно перемѣнное.

---

*) *Klein*. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen Bd. I. стр. 737.

Dyck. Notiz über eine reguläre Riemannsche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige Normalcurve vierter Ordnung. Mathematische Annalen. Bd. XVII, стр. 514.

Это суть резольвенты въ томъ тѣсномъ смыслѣ, какой былъ указанъ выше. Число критическихъ точекъ интеграловъ, полученныхъ мною резольвентъ оказывается равнымъ 3. Въ этомъ отношеніи онѣ совершенно аналогичны тѣмъ гипергеометрическимъ уравненіямъ, о которыхъ мнѣ пришлось говорить въ прежней работѣ. Ихъ можно назвать гипергеометрическими уравненіями 3-го порядка.

Вопроса о дифференціальныхъ резольвентахъ 4-го и высшихъ порядковъ я совершенно не касаюсь въ настоящей работѣ, хотя повидимому онъ можетъ быть разрѣшенъ совершенно аналогичными методами. Къ нему я надѣюсь вернуться впослѣдствіи.

Въ отдѣлѣ I я стараюсь возможно дальше разработать общую теорію дифференціальныхъ резольвентъ m-го порядка и соотвѣтствующихъ имъ основныхъ системъ уравненій. При этомъ обнаруживается, что построеніе основныхъ системъ уравненій находится въ тѣсной связи съ построеніемъ правильныхъ Римановыхъ поверхностей и такихъ кривыхъ въ пространствѣ $m-1$ измѣреній, которыя инваріантны относительно группы коллинеацій точекъ этого пространства.

Въ общей теоріи удается выяснить многія свойства дифференціальныхъ резольвентъ и основныхъ системъ уравненій; но довести задачу до конца и построить эти уравненія можно только тогда, когда дано число m.

При $m=2$ мы имѣемъ дѣло съ алгебраическими уравненіями, разрѣшимыми въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Эти уравненія составили предметъ прежней моей работы. Поэтому второй отдѣлъ настоящей работы посвященъ подробному изученію того случая, когда $m=3$.

При этомъ оказывается, что существуетъ 6 видовъ основныхъ системъ уравненій, имѣющихъ дифференціальныя резольвенты третьяго порядка. Изъ нихъ четыре находятся между собою въ тѣсной связи и я отношу эти четыре вида къ одному типу. Такимъ образомъ существуетъ три типа основныхъ системъ уравненій, имѣющихъ дифференціальную резольвенту третьяго порядка. Кромѣ того всѣ уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ, тоже имѣютъ дифференціальную резольвенту третьяго порядка. Эти уравненія выдѣлены въ особую группу, разсмотрѣнную въ послѣдней главѣ отдѣла II.

Изъ числа упомянутыхъ выше трехъ типовъ основныхъ системъ уравненій первые два были найдены уже ранѣе: первый— Клейномъ, а второй (распадающійся на 4 вида)—Дикомъ. При этомъ Клейнъ встрѣтилъ найденный имъ типъ уравненій при своихъ изслѣдованіяхъ о преобразованіи эллиптическихъ функцій. Дикъ нашелъ второй типъ уравненій, изучая виды правильныхъ Римановыхъ поверхностей рода 3. Третій типъ уравненій основной системы, на сколько мнѣ извѣстно, никѣмъ указанъ не былъ.

Тотъ вопросъ, къ которому относится настоящее изслѣдованіе, находится въ тѣсной связи со многими даже весьма удаленными другъ отъ друга областями анализа и геометріи. Поэтому приходится пользоваться разнообразными методами заимствованными изъ этихъ отдѣловъ. Непосредственно касаются разсматриваемаго мною вопроса только очень немногіе авторы. Нѣкоторые результаты, ими полученные, вошли въ мою работу, но методъ изслѣдованія въ большинствѣ случаевъ значительно разнится отъ моего метода, такъ какъ исходная точка у меня совершенно новая. Во всѣхъ мѣстахъ, гдѣ мною сдѣланы позаимствованія у другихъ авторовъ, я на нихъ указываю въ текстѣ или въ подстрочномъ примѣчаніи.

Въ заключеніе замѣчу, что настоящая работа не имѣетъ характера монографіи, какъ прежняя моя работа. Вопросъ о рѣшеніи алгебраическаго уравненія въ указанной выше формѣ поставленъ мною впервые, хотя отдѣльныя рѣшенія такого типа встрѣчались и ранѣе. Поэтому я считаю свою задачу выполненною, если мнѣ удалось объединить отдѣльные результаты въ общую теорію, намѣтить общій планъ этой теоріи и показать ея примѣненіе къ классу уравненій рода 3.

Въ концѣ книги приведенъ списокъ сочиненій, которыми мнѣ приходилось пользоваться и которыя находятся въ болѣе или менѣе тѣсной связи съ предметомъ моего изслѣдованія.

ОТДѢЛЪ I.

Общая теорія.

ГЛАВА I.

Опредѣленія и основныя теоремы.

§ 1. **Группа уравненія.**

Пусть дано алгебраическое уравненіе:

$$\Phi(y, x)=0, \tag{1}$$

гдѣ x разсматривается, какъ независимое перемѣнное, а y— какъ его функція. (Величины y и x комплексныя).

Пусть уравненіе (1) неприводимо. Его степень относительно y обозначимъ буквою n.

Каждому числовому значенію перемѣннаго x соотвѣтствуетъ n значеній функціи y. Ихъ мы будемъ обозначать такъ:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n. \tag{2}$$

Будемъ изображать величину комплекснаго перемѣннаго x точкою на плоскости. Отмѣтимъ на этой плоскости критическія точки функціи y. Послѣ сомкнутаго обхода на плоскости перемѣннаго x величины (2) n-значной функціи y измѣняются. Пусть онѣ сдѣлались соотвѣтственно равными:

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \ldots, \overline{y}_n. \tag{3}$$

Такъ какъ точка x послѣ сомкнутаго обхода пришла въ первоначальное положеніе, то велкчины (3) разнятся отъ величинъ (2) только порядкомъ. Слѣдовательно, мы въ правѣ сказать, что *всякому сомкнутому обходу на плоскости перемѣннаго x соотвѣтствуетъ нѣкоторая субституція n корней (2) уравненія (1)* *).

Найдемъ субституціи, соотвѣтствующія всевозможнымъ обходамъ на плоскости перемѣннаго x. Обозначимъ ихъ символами:

$$S_0,\ S_1,\ S_2, \ldots,\ S_{N-1}. \tag{4}$$

Относительно субституцій (4) можно сказать слѣдующее:

1) Чпсло N различныхъ между собою субституцій (4) конечно.

2) Совокупность N субституцій (4) образуетъ группу порядка N.

3) Группа (4) есть группа уравненія (1) **).

Возьмемъ одну пзъ N субститиціи (4). Ради общности разсужденій будемъ обозначать ее символомъ S и будемъ ее представлять въ такомъ видѣ:

$$S=\begin{pmatrix} \overline{y}_1, & \overline{y}_2, & \overline{y}_3, \ldots, & \overline{y}_n \\ y_1, & y_2, & y_3, \ldots, & y_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ясно, что субституцію S можно представить въ видѣ линейной подстановки:

---

*) Субституція можетъ оказаться тождественною, т. е. равною 1. Понятно, что это должно случиться всякій разъ, когда обходъ не заключаетъ внутри себя ни одной критической точки.

**) Группою уравненія (1) зазывается группа, обладающая двумя основными свойствами:

a) всякая раціональная функція корней (2), не мѣняющаяся отъ субституцій группы уравненія (1), — должна быть раціональною функціею x;

b) всякая раціональная функція корней (2), выражающаяся раціонально черезъ перемѣнное x,—не должна мѣнятися отъ субституцій группы уравненія.

Ясно, что группа субституцій (4) удовлетворяетъ обоимъ условіямъ.

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{y}_1 = a_{1,1}\,y_1 + a_{1,2}\,y_2 + a_{1,3}\,y_3 + \ldots + a_{1,n}\,y_n, \\
\bar{y}_2 = a_{2,1}\,y_1 + a_{2,2}\,y_2 + a_{2,3}\,y_3 + \ldots + a_{2,n}\,y_n, \\
\bar{y}_3 = a_{3,1}\,y_1 + a_{3,2}\,y_2 + a_{3,3}\,y_3 + \ldots + a_{3,n}\,y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{y}_n = a_{n,1}\,y_1 + a_{n,2}\,y_2 + a_{n,3}\,y_3 + \ldots + a_{n,n}\,y_n.
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Для этого необходимо, чтобы коэффиціенты формулъ (6) удовлетворяли условіямъ:

1) $a_{1,h} = a_{2,k} = a_{3,l} = \ldots = a_{n,t} = 1$,

гдѣ h, k, l,.,., t составляютъ рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,$$

расположенныхъ въ нѣкоторомъ иномъ порядкѣ,

2) всѣ остальные коэффиціенты формулъ (6) равны нулю.

Такимъ же образомъ всякая субституція (4) представится въ видѣ нѣкоторой линейной подстановки корней (2) уравненія (1).

Можетъ случиться, что не всѣ корни уравненія (1) между собою линейно - независимы. Пусть между ними только m *) линейно-независимыхъ величинъ:

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots,\ y_m. \qquad (7)$$

Остальные $m - n$ корней (2) суть линейныя однородныя функціи величинъ (7).

Вставимъ выраженія этихъ линейныхъ однородныхъ функцій въ формулы (6). Мы найдемъ, что послѣ обхода, соотвѣтствующаго субституціи S корней (2), величины (7) испытываютъ линейное преоразованіе вида:

*) Это допущеніе нисколько не уменьшаетъ общности разсужденій. Если между n корнями (2) не существуетъ ни одной линейной связи, то придется положить $m = n$.

$$\left.\begin{aligned}\overline{y}_1&=\alpha_{1,1}\,y_1+\alpha_{1,2}\,y_2+\alpha_{1,3}\,y_3+\ldots+\alpha_{1,m}\,y_m,\\ \overline{y}_2&=\alpha_{2,1}\,y_1+\alpha_{2,2}\,y_2+\alpha_{2,3}\,y_3+\ldots+\alpha_{2,m}\,y_m,\\ \overline{y}_3&=\alpha_{3,1}\,y_1+\alpha_{3,2}\,y_2+\alpha_{3,3}\,y_3+\ldots+\alpha_{3,m}\,y_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{y}_m&=\alpha_{m,1}\,y_1+\alpha_{m,2}\,y_2+\alpha_{m,3}\,y_3+\ldots+\alpha_{m,m}\,y_m.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Эту линейную подстановку будемъ обозначать тѣмъ-же символомъ S, какимъ была обозначена соотвѣтствующая субституція корней (2).

Имѣя выраженія всѣхъ корней (2) черезъ m величинъ (7), мы можемъ для каждой изъ N субституцій:

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ldots,\ S_{N-1}\qquad(4)$$

построить соотвѣтствующую линейную подстановку подобную (8).

Наоборотъ по коэффиціентамъ каждой линейной подстановки вида (8) легко построить соотвѣтствующую субститицію корней (2).

Линейныя подстановки, соотвѣтствующія субституціямъ (4), мы сокращенно будемъ обозначать тѣми же символами:

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ldots,\ S_{N-1}.\qquad(4)$$

Относительно линейныхъ подстановокъ (4) можно сказать слѣдующее:

1) Всѣ онѣ между собою различны.

2) Совокупность ихъ образуетъ группу порядка N.

3) Группа линейныхъ подстановокъ (4) есть новая форма той же самой группы уравненія (1). Мы можемъ ее поэтому назвать группою уравненія (1).

Группу уравненія мы постоянно будемъ представлять себѣ въ видѣ *совокупности линейныхъ однородныхъ подстановокъ совершаемыхъ надъ m величинами:*

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots,\ y_m.\qquad(7)$$

Примѣчаніе. Между N подстановками группы (4) непремѣнно встрѣтится тождественная подстановка:

$$\bar{y}_1=y_1,\ \bar{y}_2=y_2,\ \bar{y}_3=y_3,\ldots,\ \bar{y}_m=y_m.$$

Ее мы можемъ символически приравнять единицѣ.

Для опредѣленности разсужденій примемъ, что S_0 есть тождественная подстановка. Въ такомъ случаѣ:

$$S_0=1. \tag{9}$$

Группу подстановокъ (4) будемъ обозначать сокращенно символомъ G_N.

§ 2. **Дифференціальная резольвента.**

Возьмемъ линейное дифференціальное уравненіе m-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^m y}{dx^m}, & \frac{d^m y_1}{dx^m}, & \frac{d^m y_2}{dx^m}, & \ldots, & \frac{d^m y_m}{dx^m} \\ \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, & \ldots, & \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} \\ \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}, & \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}}, & \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}}, & \ldots, & \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy}{dx}, & \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{dy_m}{dx} \\ y, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{vmatrix}=0, \tag{10}$$

гдѣ y есть неизвѣстная функція, а $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ суть тѣ же самыя функціи перемѣннаго x, которыя выше мы отмѣтили номеромъ (7). Это — система линейно независимыхъ корней уравненія (1).

Относительно дифференціальнаго уравненія (10) можно сказать слѣдующее.

1) Ему удовлетворяетъ всякій корень уравненія (1).

2) Всѣ интегралы уравненія (10)—алгебраическіе.

3) Коэффиціенты при