ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ
и
ИНТЕГРАЛОВЪ.

съ приложеніемъ

КЪ РѢШЕНІЮ ОСНОВНАГО ВОПРОСА ГЕОДЕЗІИ.

М. Хандрикова.

МОСКВА.
Въ Университетской типографіи (Катковъ и К°),
на Страстномъ бульварѣ.
1867.

Исторія развитія того отдѣла интегральнаго исчисленія, который заключаетъ въ себѣ теорію эллиптическихъ функцій, сколько интересна, столько же и поучительна. Въ ней мы находимъ и доказательство безплодности изысканій, основанныхъ на принципахъ чуждыхъ свойствамъ изучаемаго предмета, и любопытный примѣръ двойственности метода изслѣдованія.

Хотя Лежандръ двумя своими сочиненіями: «*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*» и *Traité des fonctions elliptiques* сообщилъ теоріи эллиптическихъ функцій извѣстную степень полноты и оконченности, однако едва ли ошибемся, если скажемъ, что изслѣдованія его во многихъ случаяхъ принимаютъ частный характеръ и стоятъ довольно отрѣшенно другъ отъ друга. Подтвержденіе этого, какъ намъ кажется, можно видѣть въ томъ, что Лежандрова обработка теоріи эллиптическихъ функцій удовлетворяла геометровъ не долго. Ко времени появленія двухъ первыхъ томовъ послѣдняго Лежандрова трактата относится раскрытіе общаго понятія, въ которомъ лежитъ внутренній мотивъ плодотворнаго развитія всей области трансцендентнаго анализа.

Главный и быстрый переворотъ въ теоріи эллиптическихъ функцій сдѣланъ безсмертными геометрами Якоби и Абелемъ, которые, можно сказать, оспариваютъ другъ у друга идею разсматривать предѣлъ эллиптическаго интеграла какъ функцію этого самаго интеграла и которые этою мыслію не толь-

1

ко были наведены на новую теорію эллиптическихъ функцій, но, какъ показали Геппель и Розенгайнъ, дали анализу существеные элементы для изслѣдованія ультра-эллиптическихъ интеграловъ.

Трудами Абеля и по преимуществу Якоби теорія эллиптическихъ функцій доведена до той степени развитія, при которой только и возможно полнѣйшее аналитическое рѣшеніе многихъ вопросовъ геометріи и механики и при которой, какъ намъ кажется, этотъ отдѣлъ интегральнаго исчисленія можетъ перейти въ учебники и руководства.

Потребность частаго примѣненія теоріи эллиптическихъ функцій весьма убѣдительно заставляетъ сознавать недостатокъ элементарныхъ изложеній этой теоріи въ математической литературѣ вообще и въ русской въ особенности.

Желая, сколько позволяютъ наши силы, содѣйствовать устраненію этого недостатка, мы рѣшились изложить теорію эллиптическихъ функцій въ видѣ предлагаемаго здѣсь краткаго и элементарнаго руководства, и надѣемся, что оно принесетъ хотя малую пользу тѣмъ, которые начинаютъ изученіе названнаго нами отдѣла трансцендентнаго анализа.

I.

1. За источникъ эллиптическихъ функцій въ анализѣ принимается обыкновенно или интегралъ

$$\int \frac{f(x).\,dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

или

$$\int \frac{f(x).\,dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}}$$

гдѣ $f(x)$ есть нѣкоторая раціональная функція отъ x. Второе изъ предъидущихъ выраженій можно разсматривать какъ частный случай перваго, а потому остановимся на первомъ и покажемъ тѣ различные виды функцій, которые заключаются въ этомъ интегралѣ. Полагая $R = \sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}$, легко видѣть, что какіе бы корни не имѣло уравненіе $R^2 = 0$: дѣйствительные, мнимые или тѣ и другіе вмѣстѣ, всегда подрадикальную функцію можно разложить на два дѣйствительные множителя второй степени относительно x. Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что $R^2 = o$ имѣетъ четыре дѣйствительные корня a, b, c, d, находимъ

$$R^2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = E(x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

что легко приводится къ виду

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\delta + 2\varepsilon x + \lambda x^2).$$

Если уравненіе $R^2 = o$ имѣетъ всѣ корни мнимые, которые непремѣнно суть вида $m \pm in$ и $m_1 \pm in_1$, то

$$R^2 = E[(x-m)^2 + n^2][(x-m_1)^2 + n^2_1]$$

но это послѣднее опять приводится къ виду

$$R^2 = (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\delta + 2\varepsilon x + \lambda x^2) \ldots. \quad (a)$$

Если наконецъ уравненіе $R^2 = o$ имѣетъ два дѣйствительные корня a и b и два мнимые $m \pm in$, то

$$R^2 = E(x-a)(x-b)[(x-m)^2 + n^2],$$

что также приводится къ виду (a).

Итакъ эллиптическія функціи происходятъ отъ интеграла

$$\int \frac{f(x).\,dx}{\sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\delta + 2\varepsilon x + \lambda x^2)}}$$

Введемъ въ этотъ интегралъ новое перемѣнное z, находящееся съ x въ связи вида

$$x = \frac{p + qz}{1 + z},$$

и опредѣлимъ постоянныя p и q подъ тѣмъ условіемъ, чтобы подрадикальная функція не содержала нечетныхъ степеней перемѣннаго. Такъ какъ

$$dx = \frac{(q-p)\,dz}{(1+z)^2},$$

то разсматриваемый нами интегралъ обращается въ

$$(q-p)\int \frac{f_1(z).\,dz}{\sqrt{(\alpha_1 + 2\beta_1 z + \gamma_1 z^2)(\delta_1 + 2\varepsilon_1 z + \lambda_1 z^2)}},$$

гдѣ $f_1(z)$ есть раціональная функція новаго перемѣннаго z, а коэффиціенты α_1, β_1,.... λ_1 зависятъ отъ прежнихъ коэффиціентовъ α, β, γ,... λ и постоянныхъ p и q. Такъ какъ эти послѣднія по сдѣланному нами условію, должны быть опредѣлены изъ уравненій $\beta_1 = o$ и $\varepsilon_1 = o$, то разсматриваемый интегралъ приведется къ виду

$$(q-p)\int \frac{f_1(z)dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4}}.$$

Здѣсь подъ $f_1(z)$ мы разумѣемъ выраженіе

$$f_1(z) = \frac{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots. + A_n z^n}{B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots. + B_n z^n},$$

которое можно представить въ видѣ

$$f_1(z) = \frac{A_0 + A_2 z^2 + \ldots. + (A_1 + A_3 z^2 + \ldots)z}{B_0 + B_2 z^2 + \ldots. + (B_1 + B_3 z^2 + \ldots)z},$$

или въ видѣ

$$f_1(z) = \frac{S + Tz}{U + Vz},$$

гдѣ подъ S, T, U и V разумѣемъ функціи съ четными только степенями перемѣннаго. Умноживъ числителя и знаменателя на $U - Vz$, находимъ

$$f_1(z) = \frac{US - VT.\,z^2}{U^2 - V^2.z^2} + \frac{UT - VS}{U^2 - V^2 z^2} z = M + Nz$$

гдѣ M и N суть опять четныя функціи отъ z. Имѣя это, разбиваемъ разсматриваемый интегралъ на сумму

$$\int \frac{M dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4}} + \int \frac{Nz.\,dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4}},$$

второй изъ этихъ интеграловъ, какъ извѣстно изъ началъ интегральнаго исчисленія, заключаетъ въ себѣ только алгебраическія или элементарныя трансцендентныя функціи каковы логариѳмическія, круговыя и тригонометрическія функціи, а потому разсмотримъ только первый. Предположимъ, что трехчленъ $a + bz^2 + cz^4$ рѣшенъ относительно z^2 и имѣетъ корни m и n, тогда $R = a + bz^2 + cz^4 = c(z^2 \pm m)(z^2 \pm n)$.

Различныя комбинаціи знаковъ при m и n представляютъ здѣсь три существенно различные случая:

$$1)\ R = c(z^2 + m)(z^2 + n);\quad 2)\ R = c(z^2 - m)(z^2 + n)$$
$$3)\ R = c(z^2 - m)(z^2 - n).$$

Разсматривая эти три случая, мы будемъ предполагать, что корни выраженія R не равные. Пусть по этому въ *пер*-

вомъ случаѣ $m < n$ и $z^2 = m.\, tg^2\varphi$, тогда, полагая $\frac{n-m}{n} = k^2$, гдѣ слѣдовательно $o < k^2 < 1$, находимъ

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{cn}.\, \sqrt{1 - k^2.\, sin^2\varphi}}\,.$$

Второй случай, гдѣ $R = c(z^2 - m)(z^2 + n)$, имѣетъ два подраздѣленія 1) $z^2 < m$ и 2) $z^2 > m$.

Для перваго пусть $z^2 = m.\, cos^2\varphi$, $\frac{m}{m+n} = k^2$, гдѣ $o < k^2 < 1$, тогда

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{-\,d\varphi}{\sqrt{-\,c(m+n)}\,\sqrt{1 - k^2.\, sin^2\varphi}}\,.$$

Для втораго пусть

$$z^2 = \frac{m}{cos^2\varphi}\,;\ \frac{m}{m+n} = k^2,\ \text{гдѣ } o < k^2 < 1,$$

тогда

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{c(m+n)}.\, \sqrt{1 - k^2.\, sin^2\varphi}}\,.$$

Третій случай, гдѣ $R = c(z^2 - m)(z^2 - n)$, очевидно имѣетъ три подраздѣленія.

1) Когда $z^2 < m < n$, то, положивъ

$$z^2 = m.\, sin^2\varphi;\ k^2 = \frac{m}{n} < 1,$$

находимъ

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{cn}.\, \sqrt{1 - k^2.\, sin^2\varphi}}$$

2) если $m < z^2 < n$, то положивъ

$$z^2 = \frac{m\,.\,n}{n.\, cos^2\varphi + m.\, sin^2\varphi} = \frac{m\,.\,n}{n - (n-m)sin^2\varphi}\ ;\ k^2 = \frac{n-m}{m}\,,$$

находимъ

$$\frac{dz}{\sqrt{R}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{-cn}.\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}}$$

3) если наконецъ $z^2>n>m$, то положивъ $z^2=\frac{n}{\sin^2\varphi}$; $\frac{m}{n}=k^2$, имѣемъ

$$\frac{dz}{\sqrt{R}}=\frac{d\varphi}{n\sqrt{c}\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}}.$$

Итакъ во всѣхъ случаяхъ, когда $\sqrt{R}$ дѣйствительный, дифференціалъ $\frac{dz}{\sqrt{R}}$ приводится къ виду

$$C\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}}$$

гдѣ k и C извѣстныя дѣйствительныя величины и при томъ всегда $k^2<1$. Выраженіе $\frac{dz}{\sqrt{R}}$ приводится къ тому же виду, когда $\sqrt{R}$ мнимый, но тогда C будетъ мнимая величина.

Разсматривая формы принятыя для z^2 во всѣхъ предыдущихъ случаяхъ подъ условіемъ, чтобы всякому дѣйствительному значенію φ соотвѣтствовало дѣйствительное значеніе z, видимъ, что всѣ формы z^2 заключаются въ выраженіи

$$\frac{x+\lambda.\sin^2\varphi}{\mu+\nu.\sin^2\varphi}.$$

Поэтому въ интегралѣ

$$\int\frac{M.dz}{\sqrt{a+bz^2+cz^4}}.$$

функція M, содержащая только четныя степени перемѣннаго z^2, обращается теперь въ раціональную функцію отъ $\sin^2\varphi$ и весь интегралъ — въ

$$\int\frac{f(\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1-k.^2\sin^2\varphi}}.$$

Мы сказали, что $f(sin^2\varphi)$ есть раціональная функція отъ $sin^2\varphi$, такая функція въ самомъ общемъ смыслѣ состоитъ изъ суммы цѣлой и дробной функцій, послѣдняя можетъ быть разложена на элементарныя дроби, поэтому можно сказать, что $f(sin^2\varphi)$ состоитъ изъ совокупности членовъ вида

$$N(h + sin^2\varphi)^\mu$$

гдѣ μ можетъ имѣть значеніе всякаго положительнаго или отрицательнаго цѣлаго числа и даже нуля, а подъ N и h разумѣемъ нѣкоторыя постоянныя величины. Итакъ разсматриваемый нами интегралъ приводится къ виду

$$\int \frac{N(h + sin^2\varphi)^\mu d\varphi}{\sqrt{1 - k^2.sin^2\varphi}},$$

положимъ для краткости $\sqrt{1 - k^2.\, sin^2\varphi} = \Delta\varphi$ и, чтобы видѣть какія функціи заключаются въ этомъ интегралѣ, обратимся въ тождественному выраженію вида

$$(b) \quad (h + sin^2\varphi)^\mu sin.\, \varphi cos\varphi\Delta\varphi = \int \frac{d[(h + sin^2\varphi)^\mu sin\varphi.\, cos\varphi\Delta\varphi]}{d\varphi} d\varphi$$

исполняя дифференцированіе во второй части, находимъ, что подъ знакомъ интеграла множитель при $d\varphi$ будетъ

$$2\mu\, (h + sin^2\varphi)^{\mu-1}\, sin^2\varphi\, cos^2\varphi\, \Delta\varphi +$$
$$(h + sin^2\varphi)^\mu \left[cos^2\varphi\, \Delta\varphi - sin^2\varphi\, \Delta\varphi - \frac{k^2.\, sin^2\varphi\, cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\right]$$

умноживъ и раздѣливъ это на $\Delta\varphi$, находимъ, что множитель при $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ будетъ

$$(c) \; .\;.\;.\;.\;.\; 2\mu\, (h + sin^2\varphi)^{\mu-1}\, sin^2\varphi\, cos^2\varphi\, \Delta^2\varphi +$$
$$(h + sin^2\varphi)^\mu\, [coc^2\varphi\, \Delta^2\varphi - sin^2\varphi\, \Delta^2\varphi - k^2.\, sin^2\varphi\, cos^2\varphi]$$

полагая для краткости

$$h + sin^2\varphi = v,$$

находимъ

$$sin^2\varphi = v - h,\ cos^2\varphi = 1 - v + h,\ \Delta^2\varphi = 1 - k^2 v + k^2 h.$$

Подставляя это въ выраженіи (c), находимъ

$$(d)..-2\mu A v^{\mu-1} + (2\mu+1) B . v^{\mu} - (2\mu+2) C . v^{\mu+1} + (2\mu+3) k^2 . v^{\mu+2}$$

гдѣ

$$A = h(1+h)(1+k^2 h)$$
$$B = 1 + 2h + 2k^2 h + 3k^2 h^2$$
$$C = 1 + k^2 + 3k^2 h$$

если умножимъ выраженіе (d) на $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ и возмемъ интегралъ, то очевидно получимъ вторую часть выраженія (b). Слѣдовательно, полагая

$$\int \frac{v^{\mu} . d\varphi}{\Delta\varphi} = \int \frac{(h + sin^2\varphi)^{\mu} . d\varphi}{\Delta\varphi} = V_{\mu},$$

изъ выраженія (c) находимъ

$$(e). \ . \ . \ (h + sin^2\varphi)^{\mu}\, sin\varphi . cos\varphi\, \Delta\varphi = -2\mu\, AV_{\mu-1}$$
$$+ (2\mu+1) BV_{\mu} - (2\mu+2) CV_{\mu+1} + (2\mu+3) k^2 . V_{\mu+2}$$

откуда

$$V_{\mu+2} = \frac{(h + sin^2\varphi)^{\mu}}{(2\mu+3) k^2} sin\varphi . cos\varphi . \Delta\varphi + \frac{2\mu AV_{\mu-1}}{(2\mu+3) k^2}$$
$$- \frac{(2\mu+1) BV_{\mu}}{(2\mu+3) k^2} + \frac{(2\mu+2) CV_{\mu+1}}{(2\mu+3) k^2}$$

полагая здѣсь $\mu = 0, 1, 2, 3....$, находимъ

$$V_2 = \frac{1}{3k^2} sin\varphi . cos\varphi\, \Delta\varphi \qquad - \frac{1}{3}\frac{B}{k^2} V_0 + \frac{2}{3}\frac{C}{k^2} V_1$$

$$V_3 = \frac{(h + sin^2\varphi)}{5k^2} sin\varphi . cos\varphi\, \Delta\varphi + \frac{2}{5}\frac{A}{k^2} V_0 - \frac{3}{5}\frac{B}{k^2} V_1 + \frac{4}{5}\frac{C}{k^2} V_2$$

$$V_4 = \frac{(h + sin^2\varphi)^2}{7k^2} sin\varphi\ cos\varphi\, \Delta\varphi + \frac{4}{7}\frac{A}{k^2} V_1 - \frac{5}{7}\frac{B}{k^2} V_2 + \frac{6}{7}\frac{C}{k^2} V_3$$

$$V_5 = \frac{(h + sin^2\varphi)^3}{9k^2} sin\varphi . cos\varphi\, \Delta\varphi + \frac{6}{9}\frac{A}{k^2} V_2 - \frac{7}{9}\frac{B}{k^2} V_3 + \frac{8}{9}\frac{C}{k^2} V_4$$

. . . .

Отсюда видимъ, что V_2 выражается чрезъ V_0 и V_1, интегралъ V_3 выражается чрезъ V_0, V_1 и V_2, но V_2 выражается чрезъ V_0 и V_1, слѣд. V_3 выражается тоже чрезъ V_0 и V_1 и т. д., отсюда заключаемъ, что интегралъ V_μ для всѣхъ положительныхъ значеній μ, начиная съ 2 зависитъ только отъ двухъ интеграловъ V_0 и V_1. Что касается до отрицательныхъ значеній μ, то рѣшивъ выраженіе (e) относительно интеграла $V_{\mu-1}$ находимъ

$$V_{\mu-1} = -\frac{(h + sin^2\varphi)^\mu sin\varphi \, cos\varphi \, \Delta\varphi}{2\mu A} + \frac{(2\mu+1) BV_\mu}{2\mu A}$$
$$-\frac{(2\mu+2) CV_{\mu+1}}{2\mu A} + \frac{(2\mu+3) k^2 V_{\mu+2}}{2\mu A}$$

полагая здѣсь $\mu = -1, -2, -3$, и т. д., находимъ

$$V_{-2} = \frac{sin\varphi \, . \, cos\varphi \, \Delta\varphi}{2A(h+sin^2\varphi)} + \frac{1}{2}\frac{B}{A} V_{-1} \qquad - \frac{1}{2}\frac{k^2}{A} V_1$$

$$V_{-3} = \frac{sin\varphi \, cos\varphi \, \Delta\varphi}{4A(h+sin^2\varphi)^2} + \frac{3}{4}\frac{B}{A} V_{-2} - \frac{1}{2}\frac{C}{A} V_{-1} + \frac{1}{4}\frac{k^2}{A} V_0$$

$$V_{-4} = \frac{sin\varphi \, . \, cos\varphi \, \Delta\varphi}{6A(h+sin^2\varphi)^3} + \frac{5}{6}\frac{B}{A} V_{-3} - \frac{2}{3}\frac{C}{A} V_{-2} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{A} V_{-1}$$

. . . .

отсюда мы видимъ, что V_{-2} выражается чрезъ V_1 и V_{-1}; V_3 чрезъ V_{-1}, V_0 и V_{-2}, но V_{-2} само выражается чрезъ V_1 и V_{-1} слѣд. V_{-3} выражается чрезъ V_{-1}, V_0, V_1; также видно, что и всѣ остальные интегралы V_μ въ которыхъ μ имѣетъ отрицательное значеніе зависятъ только отъ трехъ интеграловъ V_{-1}, V_0 и V_1, а потому заключаемъ, что всѣ интегралы V_μ въ которыхъ μ имѣетъ какія угодно положительныя и отрицательныя значенія зависятъ только отъ трехъ интеграловъ V_{-1}, V_0 и V_1, другими словами интегралъ

$$V_\mu = \int \frac{(h + sin^2\varphi)^\mu d\varphi}{\Delta\varphi} \; .... \; (f)$$

приводится въ зависимость только отъ интеграловъ

$$V_{-1}=\int\frac{d\varphi}{(h+sin^2\varphi)\Delta\varphi};\quad V_0=\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi};\quad V_1=\int\frac{(h+sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta\varphi} .. (g)$$

первый изъ этихъ интеграловъ представимъ въ видѣ

$$V_{-1}=\frac{1}{h}\int\frac{d\varphi}{(1+n\,.\,sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

гдѣ $n=\frac{1}{h}$. Полагая $\frac{h+sin^2\varphi}{\Delta\varphi}=\frac{A}{\Delta\varphi}+B\Delta\varphi$, находимъ

$h+sin^2\varphi=A+B(1-k^2\,.\,sin^2\varphi)$, откуда

$$B=-\frac{1}{k^2};\quad A=\frac{hk^2+1}{k^2}$$

слѣдовательно послѣдній изъ интеграловъ (g) приводится къ

$$\int(h+sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=A\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+B\int\Delta\varphi\,.\,d\varphi$$

и такъ разсматриваемый нами интегралъ (f) окончательно приводится въ зависимость только отъ трехъ такихъ интеграловъ:

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi};\quad\int\Delta\varphi\,.\,d\varphi;\quad\int\frac{d\varphi}{(1+n\,sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

которые принимаются обыкновенно за нормальныя формы эллиптическихъ интеграловъ перваго, втораго и третьяго вида. Лежандръ означилъ ихъ чрезъ $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ и $\Pi(n,\varphi)$. Первые два интеграла зависятъ отъ двухъ величинъ φ и k, называемыхъ амплитудой и модулемъ, третій кромѣ того зависитъ отъ величины n, которая называется параметромъ.

2. Если положимъ $z=sin\varphi$, то $dz=cos\varphi\,.\,d\varphi$; $d\varphi=\frac{dz}{cos\varphi}=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ и предыдущіе интегралы обратятся въ

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}, \quad \int \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} . dz,$$

$$\int \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}.$$

Полагая

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}} = u.$$

Якоби разсматриваетъ предѣлъ интеграла какъ функцію самаго интеграла, означаетъ эту зависимость чрезъ $\varphi = am(u)$ и называетъ φ амплитудою u при модулѣ k, а самое u аргументомъ своей амплитуды φ. Тогда

$$\begin{aligned} z &= \sin am(u) \\ \sqrt{1-z^2} &= \cos am(u) \\ \sqrt{1-k^2z^2} &= \Delta\ am(u). \end{aligned}$$

Послѣ этого видно, что интегралы втораго и третьяго вида составляются извѣстнымъ образомъ изъ функцій $\sin am(u)$, $\cos\ am(u)$, $\Delta\ am(u)$, которыя поэтому мы будемъ называть элементарными эллиптическими функціями.

Такъ какъ изъ (1) слѣдуетъ, что $\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi$, то, по означенію Якоби, это выраженіе представится въ видѣ

$$(2) \qquad \frac{d am(u)}{du} = \Delta am(u).$$

Мы знаемъ, что

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi; \quad \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi; \quad \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} = -\frac{k^2\sin\varphi.\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

а это, по означенію Якоби, обратится въ

$$\frac{d\,sinam(u)}{du} = cos\,am(u)\,\Delta am(u)$$

(3) $$\frac{d\,cos\,am(u)}{du} = -\,sin\,am(u)\Delta am(u)$$

$$\frac{d\,\Delta am(u)}{du} = -\,k^2 sin\,am(u) cos\,am(u).$$

Примемъ въ интегралѣ $\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ амплитуду φ за мнимую величину и положимъ $sin\varphi = i tang\psi$, тогда, называя величину, квадратъ которой служитъ дополненіемъ до единицы квадрату модуля k, чрезъ k', т. е. принимая $k^2 + k'^2 = 1$, находимъ

$$cos\varphi = \sqrt{1 + tang^2\psi} = sec\psi;\ \Delta\varphi = \sqrt{sec^2\psi + k'^2(i tang\psi)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - k'^2 sin^2\psi}}{cos\psi} = \frac{\Delta(k',\psi)}{cos\psi},$$

далѣе выраженіе $sin\varphi = i tang\psi$ даетъ

$$cos\varphi d\varphi = \frac{i d\psi}{cos^2\psi},\ \text{ но } cos\varphi = \frac{1}{cos\psi}.$$

Слѣдовательно

$$d\varphi = i\frac{d\psi}{cos\psi}$$

послѣ этого видно, что

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = i\int\frac{d\psi}{\Delta(k',\psi)}$$

положимъ въ этомъ случаѣ

$$\int\frac{d\psi}{\Delta(k,'\psi)} = u;\ \psi = am(u,k')$$

тогда

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = iu;\ \varphi = am(iu)$$

подставляя послѣднее въ