120

ИСЧИСЛЕНІЕ

КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ.

А. МАРКОВЪ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ИНТЕРПОЛИРОВАНІЕ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1889.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета С.-Петербургскаго Университета, печатать разрѣшается. 16 Декабря 1888 года.

Деканъ *А. Совѣтовъ*.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА I.

О формулахъ интерполированія.

§ 1. Задачу интерполированія въ довольно общемъ видѣ можно поставить такъ.

Для нѣкоторой функціи $f(z)$ вычислены, соотвѣтсвенно даннымъ значеніямъ z:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m,$$

значенія самой функціи и нѣсколькихъ ея послѣдовательныхъ производныхъ:

$$\left.\begin{array}{llll} f(a_1), & f(a_2), & f(a_3), \ldots, f(a_{m-1}), & f(a_m) \\ f'(a_1), & f'(a_2), & f'(a_3), \ldots, f'(a_{m-1}), & f'(a_m) \\ f''(a_1), & f''(a_2), & f''(a_3), \ldots, f''(a_{m-1}), & f''(a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{\alpha_1-1}(a_1), & f^{\alpha_2-1}(a_2), & f^{\alpha_3-1}(a_3), \ldots, f^{\alpha_{m-1}-1}(a_{m-1}), & f^{\alpha_m-1}(a_m) \end{array}\right\} (1).$$

Требуется воспользоваться этими числами для вычисленія $f(z)$ при нѣкоторомъ новомъ данномъ значеніи z:

$$z = x.$$

Такая постановка вопроса заключаетъ въ себѣ много неопредѣленнаго и оставляетъ мѣсто для произвола.

Изъ различныхъ способовъ пользоваться данными (1) мы разсмотримъ только одинъ.

Онъ состоитъ въ томъ, что подбираютъ цѣлую функцію $F(z)$ наинизшей степени, которая удовлетворяла бы условіямъ:

$$\left.\begin{array}{lll} F(a_1)=f(a_1), & F(a_2)=f(a_2), \ldots\ldots, & F(a_m)=f(a_m) \\ F'(a_1)=f'(a_1), & F'(a_2)=f'(a_2), \ldots\ldots, & F'(a_m)=f'(a_m) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ F^{\alpha_1-1}(a_1)=f^{\alpha_1-1}(a_1), & F^{\alpha_2-1}(a_2)=f^{\alpha_2-1}(a_2), \ldots, & F^{\alpha_m-1}(a_m)=f^{\alpha_m-1}(a_m) \end{array}\right\} (2).$$

и затѣмъ полагаютъ приближенно

$$f(x)=F(x) \qquad (3).$$

Подобныя приближенныя равенства называются **формулами интерполированія.**

Здѣсь представляются двѣ задачи: надо, во первыхъ, **найти формулу интерполированія** и, во вторыхъ, **оцѣнить погрѣшность ея.**

§ 2. Приступая къ опредѣленію функціи $F(z)$, прежде всего важно замѣтить, что система (2) содержитъ

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$$

условій.

Соотвѣтственно этому, обозначая для краткости сумму

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$$

буквою n, полагаемъ $F(z)$ равною нѣкоторой цѣлой функціи $n-1^{\text{ой}}$ степени относительно z:

$$F(z)=P_0+P_1 z+P_2 z^2+\ldots+P_{n-1} z^{n-1}.$$

Тогда число неизвѣстныхъ коэффиціентовъ

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$$

будетъ равно числу условій (2) и эти послѣднія приведутся къ системѣ n уравненій первой степени относительно неизвѣстныхъ

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}.$$

Если же искомую нами цѣлую функцію представимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{array}{ll} Q_0 & +Q_{\alpha_1}(z-a_1)^{\alpha_1}+\ldots+Q_{n-\alpha_m}(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_{m-1})^{\alpha_{m-1}} \\ +Q_1(z-a_1) & +Q_{\alpha_1+1}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)+\ldots\ldots\ldots \\ +Q_2(z-a_1)^2 & +Q_{\alpha_1+2}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^2+\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \multicolumn{2}{l}{+Q_{\alpha_1-1}(z-a_1)^{\alpha_1-1}+\ldots\ldots+Q_{n-1}(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_{m-1})^{\alpha_{m-1}}(z-a_m)^{\alpha_m-1}} \end{array}$$

то можно будетъ легко опредѣлять неизвѣстныя

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$$

по порядку одно за другимъ: стоитъ только разсматривать въ системѣ (2) послѣдовательно сначала условія перваго столбца, затѣмъ втораго, третьяго и т. д.

Пусть напримѣръ функція $F(z)$ должна удовлетворять пяти условіямъ

$$F(a_1)=f(a_1),\ F'(a_1)=f'(a_1),\ F(a_2)=f(a_2),\ F'(a_2)=f'(a_2),$$
$$F(a_3)=f(a_3).$$

Полагая

$$F(z)=Q_0+Q_1(z-a_1)+Q_2(z-a_1)^2+Q_3(z-a_1)^2(z-a_2)+$$
$$+Q_4(z-a_1)^2(z-a_2)^2,$$

приходимъ къ пяти уравненіямъ

$$Q_0 = f(a_1),\ Q_1 = f'(a_1),\ Q_0 + Q_1(a_2 - a_1) + Q_2(a_2 - a_1)^2 = f(a_2),$$

$$Q_1 + 2Q_2(a_2 - a_1) + Q_3(a_2 - a_1)^2 = f'(a_2),$$

$$\left.\begin{aligned} &Q_0 + Q_1(a_3 - a_1) + Q_2(a_3 - a_1)^2 + \\ &\quad + Q_3(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2) + Q_4(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2 \end{aligned}\right\} = f(a_3),$$

изъ которыхъ послѣдовательно находимъ

$$Q_0 = f(a_1),\ Q_1 = f'(a_1),\ Q_2 = \frac{f(a_2) - f(a_1) - (a_2 - a_1) f'(a_1)}{(a_2 - a_1)^2}$$

$$Q_3 = \frac{(a_2 - a_1)\{f'(a_1) + f'(a_2)\} + 2\{f(a_1) - f(a_2)\}}{(a_2 - a_1)^3}$$

$$Q_4 = \frac{f(a_3)}{(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2} + \frac{(3a_1 - a_2 - 2a_3) f(a_1)}{(a_3 - a_1)^2(a_2 - a_1)^3} + \frac{(3a_2 - a_1 - 2a_3) f(a_2)}{(a_3 - a_2)^2(a_1 - a_2)^3}$$

$$- \frac{f'(a_1)}{(a_2 - a_1)^2(a_3 - a_1)} - \frac{f'(a_2)}{(a_1 - a_2)^2(a_3 - a_2)}.$$

При послѣдовательномъ опредѣленіи коэффиціентовъ

$$Q_0,\ Q_1,\ \ldots,\ Q_{n-1}$$

не трудно убѣдиться въ томъ, что **условіямъ (2) удовлетворяетъ одна и только одна цѣлая функція $F(z)$, $n - 1^{\underline{ой}}$ или низшей степени.**

Тѣмъ же условіямъ (2) удовлетворяютъ и многія другія цѣлыя функціи $F(z)$, только не $n - 1^{\underline{ой}}$, а высшей степени.

Разность между любою изъ нихъ и цѣлою функціею $F(z)$, составленною по выше указанному правилу, должна дѣлиться безъ остатка на произведеніе

$$(z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \ldots (z - a_m)^{\alpha_m}.$$

Итакъ, для составленія цѣлой функціи $F(z)$ наинизшей степени слѣдуетъ взять то или другое общее выраженіе цѣлой функціи $n - 1^{\underline{ой}}$ степени отъ z и затѣмъ подобрать коэффиціенты этого выраженія согласно нашимъ условіямъ (2).

Разсмотримъ подробнѣе нѣкоторые частные случаи.

Первый случай (формула Тайлора): $m = 1$, $\alpha_1 = n$, $a_1 = a$.

Въ этомъ случаѣ таблица (1) приводится къ одному столбцу и для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a) = f(a),\ F'(a) = f'(a),\ \ldots,\ F^{n-1}(a) = f^{n-1}(a).$$

По формулѣ Тайлора получаемъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.\,2} f''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) \qquad (4).$$

Второй случай (формула Лагранжа):

$$m = n,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ \ldots\ = \alpha_m = 1.$$

Таблица (1) приводится къ одной строкѣ и соотвѣтственно этому для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a_1) = f(a_1),\ F(a_2) = f(a_2),\ \ldots,\ F(a_m) = f(a_m).$$

Пользуясь формулою Лагранжа, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &F(z) = Z_1 f(a_1) + Z_2 f(a_2) + \ \ldots\ + Z_m f(a_m), \\ &\text{гдѣ вообще} \\ &(z - a_1)(z - a_2)\ \ldots\ (z - a_m) = \omega(z), \\ &Z_i = \frac{\omega(z)}{(z - a_i)\,\omega'(a_i)} \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

Третій случай:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 2,\ \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_m = 1,\ k + m = n.$$

Таблица (1) приводится къ двумъ строкамъ и соотвѣтственно этому для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a_1)=f(a_1),\ldots,F(a_k)=f(a_k),F(a_{k+1})=f(a_{k+1}),\ldots,F(a_m)=f(a_m),$$

$$F'(a_1)=f'(a_1),\ldots,F'(a_k)=f'(a_k).$$

Для рѣшенія нашей задачи составимъ сначала функцію

$$F_0(z)=Z_1 f(a_1)+Z_2 f(a_2)+\ldots+Z_m f(a_m)$$

гдѣ

$$Z_i=\frac{\omega(z)}{(z-a_i)\,\omega'(a_i)} \qquad (6).$$

и

$$\omega(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m)$$

Затѣмъ полагаемъ

$$F(z)=F_0(z)+\omega(z).\,\Theta(z).$$

Здѣсь $\Theta(z)$ нѣкоторая неизвѣстная цѣлая функція отъ z. Она должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$f'(a_1)=F'_0(a_1)+\omega'(a_1)\Theta(a_1),\ f'(a_2)=F'_0(a_2)+\omega'(a_2)\Theta(a_2),\ldots,$$
$$f'(a_k)=F'_0(a_k)+\omega'(a_k)\Theta(a_k).$$

Отсюда выводимъ

$$\Theta(a_1)=\frac{f'(a_1)-F'_0(a_1)}{\omega'(a_1)},\ \Theta(a_2)=\frac{f'(a_2)-F'_0(a_2)}{\omega'(a_2)},\ldots,\ \Theta(a_k)=\frac{f'(a_k)-F'_0(a_k)}{\omega'(a_k)}$$

и потому согласно формулѣ Лагранжа

$$\Theta(z)=U_1\{f'(a_1)-F'_0(a_1)\}+U_2\{f'(a_2)-F'_0(a_2)\}+\ldots$$
$$+U_k\{f'(a_k)-F'_0(a_k)\},$$

гдѣ вообще

$$U_j=\frac{\omega(z)(a_j-a_{k+1})(a_j-a_{k+2})\ldots(a_j-a_m)}{(z-a_j)\{\omega'(a_j)\}^2(z-a_{k+1})(z-a_{k+2})\ldots(z-a_m)} \qquad (7).$$

Съ другой стороны, составляя производную отъ $F_0(z)$ по z, получаемъ

$$F'_0(z)=Z'_1 f(a_1)+Z'_2 f(a_2)+\ldots+Z'_m f(a_m),$$

при чемъ

$$Z'_i=\frac{(z-a_i)\,\omega'(z)-\omega(z)}{(z-a_i)^2\,\omega'(a_i)}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно

$$z=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$$

можемъ вычислить

$$F'_0(a_1),\ F'_0(a_2),\ \ldots,\ F'_0(a_k).$$

Для насъ важно замѣтить, что $F'_0(a_1), F'_0(a_2), \ldots, F'_0(a_k)$ линейныя однородныя выраженія относительно $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$ и вовсе не содержатъ производныхъ $f'(a_1), f'(a_2), \ldots, f'(a_k)$.

Поэтому, не вдаваясь въ дальнѣйшія преобразованія, можемъ написать формулу слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}F(z)&=F_0(z)+\omega(z)\Theta(z)\\&=V_1 f(a_1)+V_2 f(a_2)+\ldots+V_m f(a_m)+\\&\quad+U_1\omega(z)f'(a_1)+U_2\omega(z)f'(a_2)\ldots+U_k\omega(z)f'(a_k)\end{aligned}\right\}(8).$$

Здѣсь

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_m,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_k$$

нѣкоторыя вполнѣ опредѣленныя функціи отъ z и вовсе не зависятъ отъ значеній

$$f(a_1),\ f(a_2),\ \ldots,\ f(a_m),\ f'(a_1),\ f'(a_2),\ \ldots,\ f'(a_k);$$

притомъ

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_k$$

опредѣляются по формулѣ (7).

Напримѣръ, при $k=2$ и $m=0$, получаемъ

$$F_0(z)=\frac{z-a_2}{a_1-a_2}f(a_1)+\frac{z-a_1}{a_2-a_1}f(a_2),\quad F'_0(z)=\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}+\frac{f(a_2)}{a_2-a_1}$$

$$\omega(z)=(z-a_1)(z-a_2),\quad U_1=\frac{z-a_2}{(a_1-a_2)^2},\quad U_2=\frac{z-a_1}{(a_2-a_1)^2}$$

$$\Theta(z)=\frac{z-a_2}{(a_1-a_2)^2}f'(a_1)+\frac{z-a_1}{(a_2-a_1)^2}f'(a_2)$$
$$-\frac{2z-a_1-a_2}{(a_1-a_2)^3}f(a_1)-\frac{2z-a_1-a_2}{(a_2-a_1)^3}f(a_2).$$

$$F(z)=F_0(z)+\omega(z)\Theta(z)$$
$$=\frac{(z-a_2)\{(a_1-a_2)^2-(2z-a_1-a_2)(z-a_1)\}}{(a_1-a_2)^3}f(a_1)+\frac{(z-a_1)(z-a_2)^2}{(a_1-a_2)^2}f'(a_1)$$
$$+\frac{(z-a_1)\{(a_2-a_1)^2-(2z-a_1-a_2)(z-a_2)\}}{(a_2-a_1)^3}f(a_2)+\frac{(z-a_1)^2(z-a_2)}{(a_2-a_1)^2}f'(a_2).$$
$$=\left(\frac{z-a_2}{a_1-a_2}\right)^2\left\{\frac{3a_1-a_2-2z}{a_1-a_2}f(a_1)+(z-a_1)f'(a_1)\right\}$$
$$+\left(\frac{z-a_1}{a_2-a_1}\right)^2\left\{\frac{3a_2-a_1-2z}{a_2-a_1}f(a_2)+(z-a_2)f'(a_2)\right\}$$

Четвертый случай: $m=2$, $a_1=a$, $a_2=b$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$.
Можемъ положить

$$F(z)=(z-b)^\beta\sum_{i=0,1,2,\ldots,\alpha-1}A_i(z-a)^i+(z-a)^\alpha\sum_{k=0,1,2,\ldots,\beta-1}B_k(z-b)^k;$$

тогда найдемъ

$$A_i=\left\{\frac{d^i}{dz^i}\,\frac{f(z)}{(z-b)^\beta}\right\}_{z=a}=\frac{f^i(a)}{(a-b)^\beta}-\beta\frac{f^{i-1}(a)}{(a-b)^{\beta+1}}+\ldots$$

$$B_k=\left\{\frac{d^k}{dz^k}\,\frac{f(z)}{(z-a)^\alpha}\right\}_{z=b}=\frac{f^k(b)}{(b-a)^\alpha}-\alpha\frac{f^{k-1}(b)}{(b-a)^{\alpha+1}}+\ldots$$

§ 3. Возвращаясь къ общему случаю, займемся оцѣнкою погрѣшности приближенной формулы

$$f(x)=F(x).$$

Для этой цѣли составляемъ новую цѣлую функцію $n^{\text{ой}}$ степени отъ z

$$\Phi(z)=F(z)+K(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_m)^{\alpha_m}$$

и постоянное K подбираемъ такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$f(x)=\Phi(x)=F(x)+K(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m},$$

откуда

$$K=\frac{f(x)-F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}.$$

Затѣмъ, обозначивъ буквою A наибольшее, а буквою B наименьшее изъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ x\ ^*),$$

замѣчаемъ, что уравненіе

$$f(z)=\Phi(z),$$

въ предѣлахъ отъ $z=B$ до $z=A$, имѣетъ по крайней мѣрѣ $n+1$ корней.

Слѣдовательно по теоремѣ Ролля въ тѣхъ же предѣлахъ (отъ $z=B$ до $z=A$)

уравненіе $f'(z)=\Phi'(z)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ n корней
„ $f''(z)=\Phi''(z)$ „ „ „ $n-1$ „
„ $f'''(z)=\Phi'''(z)$ „ „ „ $n-2$ „
. . . .
уравненіе $f^n(z)=\Phi^n(z)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень.

Обозначая одинъ изъ тѣхъ корней уравненія

$$f^n(z)=\Phi^n(z),$$

которые лежатъ между A и B, буквою ξ и принимая во вниманіе равенство

$$\Phi^n(z)=1.2.3\ldots n.K,$$

приходимъ къ слѣдующему результату

$$K=\frac{f^n(\xi)}{1.2.3\ldots n}.$$

---

*) Всѣ числа нашихъ вычисленій мы постоянно предполагаемъ вещественными.

Итакъ погрѣшность приближенной формулы

$$f(x) = F(x)$$

равна

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\ldots n} f^n(\xi),$$

гдѣ ξ означаетъ нѣкоторое число среднее между числами

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, x.$$

Иначе сказать, **приближенную формулу** (3) **мы можемъ замѣнить точною**

$$f(x) = F(x) + \frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\ldots n} f^n(\xi) \qquad (9).$$

Примѣняя этотъ результатъ къ вышеразобраннымъ частнымъ случаямъ, находимъ, что функціи (4) соотвѣтствуетъ формула

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(\xi) \quad (10),$$

функціи (5) — формула

$$f(x) = \sum_{i=1,2,3,\ldots m} \frac{\omega(x)}{(x-a_i)\,\omega'(a_i)} f(a_i) + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}{1.2\ldots m} f^m(\eta) \quad (11)$$

и наконецъ функціи (8) — формула

$$f(x) = F_0(x) + \omega(x)\,\theta(x)$$
$$+ \frac{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_k)^2(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)}{1.2\ldots n} f^n(\zeta) \qquad (12).$$

Здѣсь ξ, η, ζ означаютъ нѣкоторыя неизвѣстныя числа, изъ которыхъ первое (ξ) лежитъ между a и x, а два остальныя (η и ζ) лежатъ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, x.$$

§ 4. Займемся еще тѣми случаями, когда между данными (1) установленъ нѣкоторый опредѣленный порядокъ и при томъ число ихъ зависитъ отъ насъ; такъ что по желанію можно ограничиться однимъ первымъ даннымъ, или двумя первыми данными, или тремя и т. д.

Тогда полезно формулу интерполированія писать такъ, чтобы по мѣрѣ прибавленія новыхъ данныхъ въ ней приходилось только прибавлять новые члены безъ измѣненія прежнихъ.

Для уясненія сказаннаго остановимся сначала на томъ случаѣ, когда задаются послѣдовательно

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{n-1}(a), \ldots$$

Соотвѣтствующее выраженіе (4) для $F(z)$ представлено у насъ какъ разъ въ желаемомъ видѣ.

При одномъ данномъ

$$F(z) = f(a),$$

при двухъ данныхъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a),$$

при трехъ данныхъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2} f''(a)$$

и т. д.

Число членовъ въ выраженіи (4) равно числу данныхъ и по мѣрѣ прибавленія новыхъ данныхъ приходится въ этомъ выраженіи прибавлять только новые члены.

Положимъ затѣмъ, что соотвѣтственно нѣкоторому безконечному ряду чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

задаются послѣдовательно

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$$

Соотвѣтствующая функція $F(z)$ можетъ быть опредѣлена, при m данныхъ, по формулѣ (5) Лагранжа.

Эта формула имѣетъ такой видъ, что по мѣрѣ прибавленія новыхъ данныхъ приходится не только вводить новые члены, но и прежніе измѣнять.

Она даетъ, напримѣръ: при одномъ данномъ

$$F(z) = f(a_1),$$

при двухъ данныхъ

$$F(z) = f(a_1)\frac{z-a_2}{a_1-a_2} + f(a_2)\frac{z-a_1}{a_2-a_1},$$

при трехъ данныхъ

$$F(z) = f(a_1)\frac{(z-a_2)(z-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + f(a_2)\frac{(z-a_1)(z-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + f(a_3)\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

и т. д.

Постараемся преобразовать ее такъ, чтобы выше установленное условіе неизмѣняемости членовъ имѣло мѣсто.

Для этой цѣли необходимо и достаточно функцію $F(z)$, соотвѣтствующую n даннымъ

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$$

представлять въ слѣдующемъ видѣ

$$F(z) = Q_0 + Q_1(z-a_1) + Q_2(z-a_1)(z-a_2) + \ldots$$
$$+ Q_{n-1}(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1}) \quad (13),$$

гдѣ коэффиціенты

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$$

не зависятъ отъ z.

Тогда при одномъ данномъ

$$F(z) = Q_0$$

и затѣмъ, прибавляя послѣдовательно второе, третье и т. д. данныя, мы должны соотвѣтственно прибавлять члены

$$Q_1(z-a_1),\ Q_2(z-a_1)(z-a_2)$$

и т. д.

Что касается коэффиціентовъ

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1},$$

то они должны быть опредѣлены изъ уравненій

$$f(a_1) = Q_0$$
$$f(a_2) = Q_0 + Q_1(a_2-a_1)$$
$$f(a_3) = Q_0 + Q_1(a_3-a_1) + Q_2(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(a_n) = Q_0 + Q_1(a_n-a_1) + \ldots + Q_{n-1}(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}).$$

Приступая къ рѣшенію этихъ уравненій, вводимъ слѣдующія функціи отъ z

$$\left.\begin{aligned} f_0(z) &= f(z) \\ f_1(z) &= \frac{f_0(z)-f_0(a_1)}{z-a_1} \\ f_2(z) &= \frac{f_1(z)-f_1(a_2)}{z-a_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}(z) &= \frac{f_{n-2}(z)-f_{n-2}(a_{n-1})}{z-a_{n-1}} \end{aligned}\right\} \quad (14).$$

Тогда

$$f(z) = f_0(z)$$
$$= f_0(a_1) + (z-a_1)f_1(z)$$
$$= f_0(a_1) + (z-a_1)f_1(a_2) + (z-a_1)(z-a_2)f_2(z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= f_0(a_1) + (z-a_1)f_1(a_2) + (z-a_1)(z-a_2)f_2(a_3) + \ldots$$
$$+ (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+ (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})f_{n-1}(z)$$

и соотвѣтственно этому

$$
\begin{aligned}
f(a_1) &= f_0(a_1) \\
f(a_2) &= f_0(a_1) + (a_2 - a_1) f_1(a_2) \\
f(a_3) &= f_0(a_1) + (a_3 - a_1) f_1(a_2) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f(a_n) &= f_0(a_1) + (a_n - a_1) f_1(a_2) + (a_n - a_1)(a_n - a_1) f_2(a_3) + \dots \\
&\quad + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) f_{n-1}(a_n).
\end{aligned}
$$

Сравнивая послѣднія равенства съ уравненіями, опредѣляющими коэффиціенты Q, приходимъ къ слѣдующимъ формуламъ:

$$Q_0 = f(a_1),\ Q_1 = f_1(a_2),\ Q_2 = f_2(a_3), \dots, Q_{n-1} = f_{n-1}(a_n) \quad \dots (15).$$

Съ другой стороны, выводимъ послѣдовательно

$$
\left.
\begin{aligned}
& f_0(z) = f(z),\quad f_0(a_1) = f(a_1) \\
& f_1(z) = \frac{f(z)}{z - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - z},\quad f_1(a_2) = \frac{f(a_2)}{a_2 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_2} \\
& f_2(z) = \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - z)} + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - z)} \\
& f_2(a_3) = \frac{f(a_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& f_{n-1}(z) = \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{n-1})} + \\
& \qquad + \frac{f(a_{n-1})}{(a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - z)} \dots + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_{n-1})(a_1 - z)} \\
& f_{n-1}(a_n) = \frac{f(a_n)}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})} + \\
& \qquad + \frac{f(a_{n-1})}{(a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_n)} \dots + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}.
\end{aligned}
\right\} (16).
$$

Отсюда между прочимъ видно, что Q_{k-1} не зависитъ отъ порядка чиселъ

$$a_1,\ a_2, \dots, a_k.$$

Приложимъ наши формулы къ тому частному случаю, когда

$$a_1 = a,\ a_2 = a + h,\ a_3 = a + 2h, \dots, a_n = a + (n - 1)h, \dots$$

гдѣ a и h означаютъ нѣкоторыя данныя числа.

Въ этомъ случаѣ

$$
\begin{aligned}
& f_0(a_1) = f(a) \\
& h f_1(a_2) = f(a + h) - f(a) \\
& 1.\, 2 h^2 f_2(a_3) = f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) \\
& 1.\, 2.\, 3 h^3 f_3(a_4) = f(a + 3h) - 3f(a + 2h) + 3f(a + h) - f(a) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& 1.\, 2 \dots (n-1) h^{n-1} f_{n-1}(a_n) = f(a + (n-1)h) - \frac{n-1}{1} f(a + (n-2)h) + \\
& \qquad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\, 2} f(a + (n - 3)h) \dots \pm f(a).
\end{aligned}
$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ **формулѣ Ньютона для интерполированія черезъ равные промежутки:**

$$
\begin{aligned}
f(x) = G_0 &+ G_1(x - a) + G_2(x - a)(x - a - h) + \dots \\
&+ G_{n-1}(x - a)(x - a - h) \dots (x - a - (n - 1)h)
\end{aligned}
$$

гдѣ вообще

$$
\begin{aligned}
1.\, 2 \dots k h^k G_k &= f(a + kh) - \frac{k}{1} f(a + (k - 1)h) + \\
&+ \frac{k(k-1)}{1.\, 2} f(a + (k - 2)h) \dots \pm f(a).
\end{aligned}
$$

Погрѣшность ея, согласно общимъ разсужденіямъ, равна

$$\frac{(x - a)(x - a - h) \dots (x - a - (n - 1)h)}{1.\, 2 \dots n} f^n(\xi).$$

Здѣсь ξ означаетъ нѣкоторое число среднее между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h,\ x.$$

Выраженіе „интерполированіе черезъ равные промежутки" указываетъ на то обстоятельство, что всѣ разности

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ \ldots,\ a_n-a_{n-1},\ \ldots$$

равны между собой.

Литература.

Briggs. Arithmetica logarithmica.
Trigonometria Britannica.

Newton. Philosophiae naturalis principiae. Liber tertius, lemma V.
Opuscula mathematica. Methodus differentialis.

Stirling. Methodus differentialis.

Lagrange. Leçons élémentaires. Leçon cinquième (Oeuvres VII).
Sur les interpolations (Oeuvres VII).

Laplace. Théorie analytique des probabilités. Livre premier, §§ 3, 4.

Gauss. Theoria interpolationis (Werke III).

Ampère. Fonctions interpolaires (Annales de Gergonne, 1826).

Cauchy. Sur les fonctions interpolaires (Comptes rendus XI).
Mémoire sur l'interpolation (Journal de Lionville, 1837).

Tchébychef. Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés (Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, 1859).
Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombres de données (Mém. de l'Académie de St. Pétersbourg, 1859).

Hermite. Sur la formule de Lagrange (Crelle's Journal 84).

Possé. Sur quelques applications des fractions continues.

ГЛАВА II.

Конечныя разности различныхъ порядковъ.

§ 5. Останавливаясь еще на формулѣ Ньютона, покажемъ какимъ образомъ вычисленіе ея коэффиціентовъ приводится къ послѣдовательнымъ вычитаніямъ.

Для этой цѣли составимъ посредствомъ послѣдовательныхъ вычитаній слѣдующую таблицу *)

$$\left.\begin{array}{llll}
f(a), & f(a+h)-f(a)=\Delta f(a), & \Delta f(a+h)-\Delta f(a)=\Delta^2 f(a), & \Delta^3 f(a)\ldots \\
f(a+h), & f(a+2h)-f(a+h)=\Delta f(a+h), & \Delta^2 f(a+h), & \Delta^3 f(a+h)\ldots \\
f(a+2h), & f(a+3h)-f(a+2h)=\Delta f(a+2h), & \Delta^2 f(a+2h), & \ldots\ldots\ldots \\
f(a+3h), & f(a+4h)-f(a+3h)=\Delta f(a+3h), & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
f(a+4h), & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (17).$$

*) Каждый столбецъ этой таблицы выводится изъ предыдущаго столбца совершенно также, какъ второй — изъ перваго.

Мы полагаемъ для краткости

$$\left.\begin{aligned}
f(z+h) \quad &- \quad f(z) = \Delta f(z)\\
\Delta f(z+h) \quad &- \Delta f(z) = \Delta^2 f(z)\\
\Delta^2 f(z+h) \quad &- \Delta^2 f(z) = \Delta^3 f(z)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta^{n-1} f(z+h) &- \Delta^{n-1} f(z) = \Delta^n f(z)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (18).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ условимся называть

$$\Delta f(z),\ \Delta^2 f(z),\ \Delta^3 f(z),\dots.$$

конечными разностями, или просто разностями, отъ $f(z)$: соотвѣтственно перваго порядка, втораго, третьяго и т. д.

Употребляя такой способъ выраженія, можемъ сказать, что наша таблица (17) содержитъ:

въ первомъ столбцѣ послѣдовательныя значенія функціи $f(z)$,
во второмъ столбцѣ соотвѣтственныя значенія первой разности $\Delta f(z)$,
въ третьемъ „ „ „ второй разности $\Delta^2 f(z)$

и т. д.

Замѣтимъ, что разность n^{го} порядка отъ $f(z)$ равна первой разности отъ разности n—1^{го} порядка отъ $f(z)$:

$$\Delta^n f(z) = \Delta\Delta^{n-1} f(z) = \Delta^{n-1} f(z+h) - \Delta^{n-1} f(z).$$

Отсюда нетрудно вывесть еще болѣе общее равенство

$$\Delta^{\alpha+\beta} f(z) = \Delta^\alpha \Delta^\beta f(z),$$

гдѣ α и β означаютъ какія угодно цѣлыя положительныя числа.

Покажемъ теперь, что коэффиціенты формулы Ньютона отличаются отъ членовъ первой строки составленной нами таблицы только нѣкоторыми постоянными множителями; именно

$$G_0 = f(a),\ G_1 = \frac{\Delta f(a)}{1.h},\ G_2 = \frac{\Delta^2 f(a)}{1.2\,h^2},\ G_3 = \frac{\Delta^3 f(a)}{1.2.3.h^3},\dots.$$

Всѣ эти равенства заключаются какъ частные случаи въ слѣдующемъ

$$\Delta^k f(z) = f(z+kh) - \frac{k}{1} f(z+(k-1)h) + \frac{k(k-1)}{1.2} f(z+(k-2)h)\dots$$
$$+ (-1)^k f(z) \qquad (19),$$

гдѣ k означаетъ произвольное цѣлое положительное число.

Что же касается равенства (19), то въ справедливости его при $k=1$ и при $k=2$ нетрудно убѣдиться непосредственно:

$$\Delta f(z) \quad = f(z+h) \quad - f(z)$$
$$\Delta f(z+h) = f(z+2h) - f(z+h)$$
$$\Delta^2 f(z) = \Delta f(z+h) - \Delta f(z) = f(z+2h) - 2f(z+h) + f(z).$$

Сверхъ того, если оно имѣетъ мѣсто при нѣкоторомъ значеніи k

$$k = m,$$

то должно сохранять свою силу и при увеличеніи k на единицу; такъ какъ тогда

$$\Delta^m f(z) \quad = \quad f(z+mh) - \frac{m}{1} f(z+(m-1)h) + \frac{m(m-1)}{1.2} f(z+(m-2)h)\dots$$

$$\Delta^m f(z+h) = f(z+(m+1)h) - \frac{m}{1} f(z+mh) + \frac{m(m-1)}{1.2} f(z+(m-1)h)$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} f(z+(m-2)h)\dots.$$

$$\Delta^{m+1} f(z) = \Delta^m f(z+h) - \Delta^m f(z)$$
$$= f(z+(m+1)h) - \left(\frac{m}{1}+1\right) f(z+mh) + \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}+1\right) f(z+(m-1)h)\dots.$$
$$+ (-1)^{i+1} \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\,..i}\left(\frac{m-i}{i+1}+1\right) f(z+(m-i)h)\dots + (-1)^{m+1} f(z)$$
$$= f(z+(m+1)h) - \frac{m+1}{1} f(z+mh) + \frac{(m+1)m}{1.2} f(z+(m-1)h)\dots.$$
$$\dots + (-1)^{m+1} f(z).$$