ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	Строка.	Напечатано.		Должно быть.	
15	18	$(n-1)h$		$(n-2)h$	
20	15	$\Delta^{n+1}f(a)$		$\Delta^{n-1}f(a)$	
39	9	$\Delta^2 f(a)$		$\Delta f(a)$	
44	15	$z=100$		$z=30100$	
54	2	$\frac{1}{2.10}$		$\frac{1}{2.10^{11}}$	
82	18	2_m		$2m$	
92	18	$\omega_{m+1}(z)$	(71)	$\omega_{m-1}(z)$	(71)
93	16	$p_{m+1}\omega_{m+1}(z)$		$p_{m+1}\omega_{m-1}(z)$	
95	3	$p_{m+1}\omega_{m+1}(z)$		$p_{m+1}\omega_{m-1}(z)$	
	Тамъ же	$p_{m+1}\omega_{m+1}(x)$		$p_{m+1}\omega_{m-1}(x)$	

ИСЧИСЛЕНІЕ

КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ.

А. МАРКОВЪ.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

УРАВНЕНІЯ ВЪ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЯХЪ И СУММИРОВАНІЕ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1891.

По распоряженію Физико-Математическаго Факультета С.-Петербургскаго Университета, печатать разрѣшается. 21 Сентября 1890.

Деканъ *А. Совѣтовъ.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Суммированіе въ связи съ вопросомъ объ опредѣленіи функціи по ея разности перваго порядка.

§ 1. Возьмемъ такія двѣ функціи $F(x)$ и $f(x)$ одной перемѣнной x, которыя связаны между собой уравненіемъ

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = f(x) \qquad (1),$$

гдѣ h означаетъ число данное.

Полагая въ уравненіи (1) x послѣдовательно равнымъ

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)h,$$

получаемъ n равенствъ

$$F(a+h) - F(a) = f(a),$$

$$F(a+2h) - F(a+h) = f(a+h),$$

$$F(a+3h) - F(a+2h) = f(a+2h),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(a+nh) - F\big(a+(n-1)h\big) = f\big(a+(n-1)h\big),$$

откуда посредствомъ сложенія выводимъ

$$F(a+nh) - F(a) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f\big(a+(n-1)h\big) \quad (2).$$

Совершенно также найдемъ

$$F(a)-F(a-nh)=f(a-h)+f(a-2h)+\ldots+f(a-nh) \quad (3).$$

Въ томъ случаѣ, когда функція $f(x)$ дана а $F(x)$ неизвѣстна, формулы (2) и (3) могутъ служить для вычисленія $F(x)$ при всякомъ значеніи x, которое отличается отъ даннаго числа a на цѣлое число разъ взятое h, если только будетъ дано $F(a)$.

Въ томъ же случаѣ, когда обѣ функціи $f(x)$ и $F(x)$ извѣстны, формула (2) можетъ служить для вычисленія суммы

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+(n-1)h),$$

которую для краткости условимся обозначать символомъ

$$\sum_a^{a+nh} f(x).$$

Итакъ, если

$$\Delta F(x)=f(x) \quad (1),$$

то

$$F(a+nh)-F(a)=f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)=\sum_a^{a+nh} f(x) \quad (2).$$

§ 2. Пусть

$$F(x)=\frac{A\,(x-b)(x-b-h)\ldots(x-b-kh)}{(k+1)\,h} \quad (A \text{ пост.}).$$

Тогда

$$f(x)=\Delta F(x)=A\,(x-b)(x-b-h)\ldots(x-b-(k-1)\,h)$$

и формула (2) даетъ

$$\sum_a^{a+nh} A\,(x-b)(x-b-h)\ldots(x-b-(k-1)\,h)=$$

$$=\frac{A\,(a-b+nh)\,(a-b+(n-1)\,h)\ldots(a-b+(n-k)\,h)}{(k+1)\,h}$$

$$-\frac{A\,(a-b)(a-b-h)\ldots(a-b-kh)}{(k+1)\,h} \quad (3).$$

Въ частности, при $b=a$, имѣемъ

$$\sum_a^{a+nh} A\,(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(k-1)\,h)=$$

$$=A\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k)}{k+1}\,h^k.$$

Пусть далѣе $f(x)$ означаетъ какую нибудь цѣлую функцію $m^{\text{ой}}$ степени отъ x.

Такую цѣлую функцію мы можемъ представить подъ видомъ

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)(x-a-h)+\ldots$$

$$\ldots+A_m(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(m-1)\,h).$$

Съ другой стороны не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если

$$f(x)=A_0\varphi_0(x)+A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_m\varphi_m(x),$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots, A_m$ числа постоянныя а $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ какія нибудь функціи отъ x, то

$$\sum_a^{a+nh} f(x)=A_0\sum_a^{a+nh}\varphi_0(x)+A_1\sum_a^{a+nh}\varphi_1(x)+\ldots+A_m\sum_a^{a+nh}\varphi_m(x).$$

Поэтому

$$\sum_a^{a+nh} f(x)=\sum_a^{a+nh}\Big\{A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)(x-a-h)+\ldots$$

$$\ldots+A_m(x-a)\ldots(x-a-(m-1)h)\Big\}$$

$$=A_0 n+A_1\sum_a^{a+nh}(x-a)+A_2\sum_a^{a+nh}(x-a)(x-a-h)+\ldots$$

$$\ldots+A_m\sum_a^{a+nh}(x-a)\ldots(x-a-(m-1)\,h)$$

$$=A_0 n+A_1\frac{n\,(n-1)}{2}\,h+A_2\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3}\,h^2+\ldots$$

$$\ldots+A_m\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m)}{m+1}\,h^m.$$

Например

$$x^2 = x + x(x-1),$$

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

и соответственно этому

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{(2n-1)n(n-1)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3 = \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1)(n-2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = \left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2.$$

Изъ предыдущаго видно, что въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ цѣлая функція отъ x, уравненію

$$\Delta F(x) = f(x)$$

удовлетворяетъ нѣкоторая цѣлая функція $F(x)$, степень которой на единицу больше степени $f(x)$.

Если

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{m-1} x^{m-1} + B_m x^m$$

и

$$F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{m-1} x^{m-1} + C_m x^m + C_{m+1} x^{m+1}$$

то по даннымъ

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{m-1},\ B_m$$

коэффиціенты

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{m-1},\ C_m,\ C_{m+1}$$

опредѣляются уравненіями

$$(m+1)hC_{m+1} = B_m$$

$$\frac{(m+1)m}{1.2} h^2 C_{m+1} + mhC_m = B_{m-1}$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} h^3 C_{m+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 C_m + (m-1)hC_{m-1} = B_{m-2}$$

. . . .

Что же касается коэффиціента C_0, то ему можно дать какое угодно значеніе.

Для примѣра положимъ

$$f(x) = x^4,\quad h = 1,\quad F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5.$$

Въ этомъ случаѣ коэффиціенты

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5$$

опредѣляются пятью уравненіями

$$5C_5 = 1,\ 10C_5 + 4C_4 = 0,\ 10C_5 + 6C_4 + 3C_3 = 0,\ 5C_5 + 4C_4 + 3C_3 + 2C_2 = 0,$$

$$C_5 + C_4 + C_3 + C_2 + C_1 = 0,$$

откуда выводимъ

$$C_5 = \frac{1}{5},\quad C_4 = -\frac{1}{2},\quad C_3 = \frac{1}{3},\quad C_2 = 0,\quad C_1 = -\frac{1}{30}.$$

Слѣдовательно

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (x-1)^4 = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30} = \frac{(6x^3 - 9x^2 + x + 1)x(x-1)}{30}.$$

§ 3. Переходя къ тѣмъ случаямъ когда

$$f(x) = \partial^x \varphi(x),$$

гдѣ ∂ число постоянное и $\varphi(x)$ цѣлая функція отъ x, выведемъ такъ называемую **формулу суммированія по частямъ**, аналогичную формулѣ интегрированія по частямъ.

Для этой цѣли разсмотримъ разность отъ произведенія двухъ функцій:

$$\Delta\psi(x)\varphi(x) = \left\{\varphi(x) + \Delta\varphi(x)\right\}\psi(x+h) - \varphi(x)\psi(x)$$

$$= \varphi(x)\left\{\psi(x+h) - \psi(x)\right\} + \psi(x+h)\Delta\varphi(x)$$

$$= \varphi(x)\Delta\psi(x) + \psi(x+h)\Delta\varphi(x).$$

Отсюда затѣмъ выводимъ

$$\sum_a^{a+nh} \varphi(x)\Delta\psi(x) + \sum_a^{a+nh} \psi(x+h)\Delta\varphi(x) = \psi(a+nh)\varphi(a+nh) - \psi(a)\varphi(a)$$

и такимъ образомъ приходимъ къ вышеупомянутой **формулѣ суммированія по частямъ.**

$$\sum_a^{a+nh}\varphi(x)\Delta\psi(x)=\psi(a+nh)\varphi(a+nh)-\psi(a)\varphi(a)-\sum_a^{a+nh}\psi(x+h)\Delta\varphi(x) \quad (4).$$

Положимъ теперь

$$\psi(x)=\frac{\partial^x}{\partial^h-1}.$$

Тогда

$$\Delta\psi(x)=\partial^x$$

и формула (4) даетъ

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\varphi(x)=\frac{\partial^{a+nh}\varphi(a+nh)-\partial^a\varphi(a)}{\partial^h-1}-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta\varphi(x).$$

Если $\varphi(x)$ цѣлая функція $m^{\text{ой}}$ степени отъ x, то $\Delta\varphi(x)$ цѣлая функція $m-1^{\text{ой}}$ степени отъ x.

Въ этомъ случаѣ, примѣняя формулу суммированія по частямъ послѣдовательно къ суммамъ

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\varphi(x),\quad \sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta\varphi(x),\quad \sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta^2\varphi(x),\ \ldots\ldots,\quad \sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta^m\varphi(x),$$

мы получимъ $m+1$ равенствъ

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\varphi(x)=\frac{\partial^{a+nh}\varphi(a+nh)-\partial^a\varphi(a)}{\partial^h-1}-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta\varphi(x),$$

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta\varphi(x)=\frac{\partial^{a+nh}\Delta\varphi(a+nh)-\partial^a\Delta\varphi(a)}{\partial^h-1}-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta^2\varphi(x),$$

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta^2\varphi(x)=\frac{\partial^{a+nh}\Delta^2\varphi(a+nh)-\partial^a\Delta^2\varphi(a)}{\partial^h-1}-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\sum_a^{a+n}\partial^x\Delta^3\varphi(x),$$

. . . .

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\Delta^m\varphi(x)=\frac{\partial^{a+nh}-\partial^a}{\partial^h-1}\Delta^m\varphi(a),$$

изъ которыхъ найдемъ

$$\sum_a^{a+nh}\partial^x\varphi(x)=\frac{\partial^{a+nh}}{\partial^h-1}\left\{\varphi(a+nh)-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\Delta\varphi(a+nh)+\ldots\ldots+\left(\frac{-\partial^h}{\partial^h-1}\right)^m\Delta^m\varphi(a+nh)\right\}$$

$$-\frac{\partial^a}{\partial^h-1}\left\{\varphi(a)-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\Delta\varphi(a)+\left(\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\right)^2\Delta^2\varphi(a)+\ldots\ldots+\left(\frac{-\partial^h}{\partial^h-1}\right)^m\Delta^m\varphi(a)\right\} \quad (5).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе

$$\Delta F(x)=\partial^x\varphi(x)$$

допускаетъ слѣдующее рѣшеніе

$$F(x)=\frac{\partial^x}{\partial^h-1}\left\{\varphi(x)-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\Delta\varphi(x)+\ldots\ldots+\left(\frac{-\partial^h}{\partial^h-1}\right)^m\Delta^m\varphi(x)\right\}+C,$$

гдѣ C означаетъ произвольное постоянное.

Полученный нами результатъ даетъ возможность опредѣлить сумму безконечнаго ряда

$$\partial^a\varphi(a),\quad \partial^{a+h}\varphi(a+h),\quad \partial^{a+2h}\varphi(a+2h),\ \ldots\ldots$$

въ томъ случаѣ, когда при $h>0$ численное значеніе ∂ меньше единицы *).

Именно

$$\sum_a^{\infty}\partial^x\varphi(x)=-\frac{\partial^a}{\partial^h-1}\left\{\varphi(a)-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\Delta\varphi(a)+\left(\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\right)^2\Delta^2\varphi(a)+\ldots\ldots+\left(\frac{-\partial^h}{\partial^h-1}\right)^m\Delta^m\varphi(a)\right\}$$

такъ какъ

$$\text{пред.}\ \frac{\partial^x}{\partial^h-1}\left\{\varphi(x)-\frac{\partial^h}{\partial^h-1}\Delta\varphi(x)+\ldots+\left(\frac{-\partial^h}{\partial^h-1}\right)^m\Delta^m\varphi(x)\right\}_{x=\infty}=0.$$

*) Если при $h>0$ численное значеніе ∂ равно или болѣе единицы, то нашъ рядъ расходящійся.

Напримѣръ

$$\frac{a^2}{3^a}+\frac{(a+1)^2}{3^{a+1}}+\frac{(a+2)^2}{3^{a+2}}+\ldots\ldots=\frac{a^2+\frac{1}{2}(2a+1)+\frac{1}{4}\cdot 2}{2.3^{a-1}}=\frac{a^2+a+1}{2.3^{a-1}}.$$

Числу ∂ можно давать и комплексныя значенія; такимъ образомъ можно вывесть нѣкоторыя выраженія для суммъ

$$\sum_a^{a+nh}\rho^x\varphi(x)\operatorname{Cos}\alpha x \quad \text{и} \quad \sum_a^{a+nh}\rho^x\varphi(x)\operatorname{Sin}\alpha x,$$

гдѣ ρ и α числа постоянныя а $\varphi(x)$ по прежнему цѣлая функція отъ x: стоитъ только положить

$$\partial=\rho e^{\alpha\sqrt{-1}}.$$

И не трудно убѣдиться, что уравненіямъ

$$\Delta F(x)=\rho^x\varphi(x)\operatorname{Cos}\alpha x \quad \text{и} \quad \Delta F_1(x)=\rho^x\varphi(x)\operatorname{Sin}\alpha x$$

удовлетворяютъ выраженія слѣдующаго вида

$$F(x)=\rho^x\Big[\Phi_0(x)\operatorname{Cos}\alpha x+\Phi_1(x)\operatorname{Sin}\alpha x\Big]$$

и

$$F_1(x)=\rho^x\Big[\Phi_0(x)\operatorname{Sin}\alpha x-\Phi_1(x)\operatorname{Cos}\alpha x\Big]$$

гдѣ $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ цѣлыя функціи отъ x, той же степени какъ и $\varphi(x)$.

Для опредѣленія функцій $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ можно употребить способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, какъ мы покажемъ на частныхъ примѣрахъ.

Положимъ сначала

$$\varphi(x)=1,\qquad h=1,\qquad a=0.$$

Тогда

$$F(x)=\rho^x\Big[A\operatorname{Cos}\alpha x+B\operatorname{Sin}\alpha x\Big],\ F_1(x)=\rho^x\Big[A\operatorname{Sin}\alpha x-B\operatorname{Cos}\alpha x\Big]$$

$$\Delta F(x)=\rho^{x+1}\Big[A\operatorname{Cos}(\alpha x+\alpha)+B\operatorname{Sin}(\alpha x+\alpha)\Big]$$

$$-\rho^x\Big[A\operatorname{Cos}\alpha x+B\operatorname{Sin}\alpha x\Big]$$

$$=\rho^x\Big\{A(\rho\operatorname{Cos}\alpha-1)+B\rho\operatorname{Sin}\alpha\Big\}\operatorname{Cos}\alpha x+$$

$$+\rho^x\Big\{B(\rho\operatorname{Cos}\alpha-1)-A\rho\operatorname{Sin}\alpha\Big\}\operatorname{Sin}\alpha x$$

а коэффиціенты A и B опредѣляются двумя уравненіями

$$A(\rho\operatorname{Cos}\alpha-1)+B\rho\operatorname{Sin}\alpha=1 \quad \text{и} \quad B(\rho\operatorname{Cos}\alpha-1)-A\rho\operatorname{Sin}\alpha=0,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$A=-\frac{1-\rho\operatorname{Cos}\alpha}{1-2\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2},\qquad B=\frac{\rho\operatorname{Sin}\alpha}{1-2\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2}.$$

Слѣдовательно

$$1+\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2\operatorname{Cos}2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\operatorname{Cos}(n-1)\alpha=$$

$$=\frac{(1-\rho\operatorname{Cos}\alpha)(1-\rho^n\operatorname{Cos}n\alpha)+\rho^{n+1}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}n\alpha}{1-2\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2}$$

и

$$\rho\operatorname{Sin}\alpha+\rho^2\operatorname{Sin}2\alpha+\ldots\ldots+\rho^{n-1}\operatorname{Sin}(n-1)\alpha=$$

$$=\frac{\rho\operatorname{Sin}\alpha(1-\rho^n\operatorname{Cos}n\alpha)-(1-\rho\operatorname{Cos}\alpha)\rho^n\operatorname{Sin}n\alpha}{1-2\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2}.$$

Послѣднія равенства при $\rho=1$ обращаются въ такія

$$1+\operatorname{Cos}\alpha+\operatorname{Cos}2\alpha+\ldots+\operatorname{Cos}(n-1)\alpha=\frac{\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{Sin}\frac{2n-1}{2}\alpha}{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{Sin}\alpha+\operatorname{Sin}2\alpha+\ldots+\operatorname{Sin}(n-1)\alpha=\frac{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{Cos}\frac{2n-1}{2}\alpha}{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}.$$

Изъ нихъ не трудно также при $\rho<1$ вывесть извѣстныя формулы

$$1+\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2\operatorname{Cos}2\alpha+\rho^3\operatorname{Cos}3\alpha+\ldots=\sum_0^\infty\rho^x\operatorname{Cos}\alpha x=\frac{1-\rho\operatorname{Cos}\alpha}{1-2\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2},$$

$$\rho\operatorname{Sin}\alpha+\rho^2\operatorname{Sin}2\alpha+\rho^3\operatorname{Sin}3\alpha+\ldots=\sum_0^\infty\rho^x\operatorname{Sin}\alpha x=\frac{\rho\operatorname{Sin}\alpha}{1-2\rho\operatorname{Cos}\alpha+\rho^2}.$$

Для другаго примѣра положимъ

$$\varphi(x)=x,\qquad h=1,\qquad \rho=1.$$

Въ этомъ случаѣ

$$F(x)=(A+Cx)\operatorname{Cos}\alpha x+(B+Dx)\operatorname{Sin}\alpha x$$

$$\Delta F(x)=(A+C+Cx)\operatorname{Cos}(\alpha x+\alpha)+(B+D+Dx)\operatorname{Sin}(\alpha x+\alpha)$$
$$-(A+Cx)\operatorname{Cos}\alpha x-(B+Dx)\operatorname{Sin}\alpha x$$
$$=\Big[(A+C)\operatorname{Cos}\alpha-A+(B+D)\operatorname{Sin}\alpha+\Big\{C(\operatorname{Cos}\alpha-1)+D\operatorname{Sin}\alpha\Big\}x\Big]\operatorname{Cos}\alpha x$$
$$+\Big[-(A+C)\operatorname{Sin}\alpha+(B+D)\operatorname{Cos}\alpha-B+\Big\{D(\operatorname{Cos}\alpha-1)-C\operatorname{Sin}\alpha\Big\}x\Big]\operatorname{Sin}\alpha x$$

и коэффиціенты A, C, B, D опредѣляются четырьмя уравненіями

$$C(\operatorname{Cos}\alpha-1)+D\operatorname{Sin}\alpha=1 \quad A(\operatorname{Cos}\alpha-1)+C\operatorname{Cos}\alpha+B\operatorname{Sin}\alpha+D\operatorname{Sin}\alpha=0$$
$$D(\operatorname{Cos}\alpha-1)-C\operatorname{Sin}\alpha=0 \quad -A\operatorname{Sin}\alpha-C\operatorname{Sin}\alpha+B(\operatorname{Cos}\alpha-1)+D\operatorname{Cos}\alpha=0$$

изъ которыхъ находимъ

$$C=-\frac{1}{2},\qquad D=\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{2(1-\operatorname{Cos}\alpha)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}},\qquad A=\frac{1}{4\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}},\qquad B=0.$$

Слѣдовательно

$$\sum_0^n x\operatorname{Cos}\alpha x=\frac{\left(1-2n\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{Cos}\alpha n+2n\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\operatorname{Sin}\alpha n-1}{4\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{Cos}\alpha n-1}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\right)^2}+\frac{n\operatorname{Sin}\alpha\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sum_0^n x\operatorname{Sin}\alpha x=\frac{\left(1-2n\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{Sin}\alpha n-2n\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\operatorname{Cos}\alpha n}{4\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\alpha n}{4\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{n\operatorname{Cos}\alpha\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 4. Довольно просто выражается сумма

$$\sum_a^{a+nh} f(x)$$

и въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ имѣетъ видъ дроби

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)},$$

гдѣ $\varphi(x)$ цѣлая функція $m-1^{\text{ой}}$ степени отъ x, или еще низшей.

Въ самомъ дѣлѣ изъ равенства

$$\Delta\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots.(x+(k-1)h)}=\frac{-kh}{x(x+h)(x+2h)\ldots.(x+kh)}$$

вытекаетъ такое

$$\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x(x+h)\ldots.(x+kh)}=\frac{1}{hk}\,\frac{1}{a(a+h)\ldots(a+(k-1)h)}$$
$$-\frac{1}{hk}\,\frac{1}{(a+nh)\ldots(a+(n+k-1)h)}\qquad(6).$$

Съ другой стороны всякую цѣлую функцію $\varphi(x)$, $m-1^{\text{ой}}$ степени отъ x, можно представить подъ видомъ

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x+mh)+A_2(x+mh)(x+(m-1)h)+\ldots$$
$$\ldots+A_{m-1}(x+mh)\ldots(x+2h);$$

такъ что

$$\sum_a^{a+nh}\frac{\varphi(x)}{x(x+h)\ldots(x+mh)}=A_0\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+mh)}+A_1\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+(m-1)h)}$$
$$+A_2\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+(m-2)h)}+\ldots.+A_{m-1}\sum\frac{1}{x(x+h)}$$
$$=\frac{A_0}{mh}\left\{\frac{1}{a(a+h)\ldots(a+(m-1)h)}-\frac{1}{(a+nh)\ldots.(a+(n+m-1)h)}\right\}$$
$$+\ldots\ldots\ldots+\frac{A_{m-1}}{h}\left\{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nh}\right\}.$$

Полученный нами результатъ можетъ служить для опредѣленія суммы безконечнаго ряда

$$\frac{\varphi(a)}{a(a+h)\ldots.(a+mh)},\quad\frac{\varphi(a+h)}{(a+h)(a+2h)\ldots.(a+(m+1)h)},\quad\frac{\varphi(a+2h)}{(a+2h)\ldots(a+(m+2)h)},\ldots\ldots;$$

именно находимъ

$$\sum_a^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x(x+h)\ldots.(x+mh)}=\frac{A_0}{mha(a+h)\ldots.(a+(m-1)h)}+\frac{A_1}{(m-1)ha(a+h)\ldots(a+(m-2)h)}+$$
$$\ldots\ldots+\frac{A_{m-2}}{2ha(a+h)}+\frac{A_{m-1}}{ha},$$

такъ какъ при безпредѣльномъ возрастаніи n всѣ выраженія

$$\frac{1}{(a+nh)\ldots.(a+(n+m-1)h)},\quad\frac{1}{(a+nh)\ldots.(a+(n+m-2)h)},\ldots\ldots,\quad\frac{1}{a+nh}$$

приближаются къ предѣлу равному нулю.

Напримѣръ

$$\frac{10}{1.2.3.4}+\frac{14}{2.3.4.5}+\frac{18}{3.4.5.6}+\ldots=\sum_1^\infty\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\sum_1^\infty\frac{-6+4(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\sum_1^\infty\frac{-6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+$$

$$+\sum_1^\infty\frac{4}{x(x+1)(x+2)}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

и

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+1)(a+4)}+\frac{1}{(a+2)(a+5)}+\ldots=\sum_a^\infty\frac{1}{x(x+3)}=$$

$$=\sum_a^\infty\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\sum_a^\infty\frac{2-2(x+3)+(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{2}{3a(a+1)(a+2)}-\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{a}.$$

Здѣсь въ обоихъ примѣрахъ $h=1$.

До сихъ поръ мы предполагали, что степень цѣлой функціи $\varphi(x)$ въ выраженіи

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}$$

меньше m.

Если же степень $\varphi(x)$ равна m, то подобно предыдущему можемъ положить

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x+mh)+\ldots+A_{m-1}(x+mh)\ldots(x+2h)+$$
$$+A_m(x+mh)\ldots(x+h)$$

и соотвѣтственно этому найдемъ

$$\sum_a^{a+nh}\frac{\varphi(x)}{x(x+h)\ldots(x+mh)}=\frac{A_0}{mh}\left\{\frac{1}{a(a+h)\ldots(a+(m-1)h)}-\frac{1}{(a+nh)\ldots(a+(m+n-1)h)}\right\}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{A_{m-1}}{h}\left\{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nh}\right\}+A_m\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x}.$$

Наконецъ въ томъ случаѣ, когда степень $\varphi(x)$ больше m, изъ дроби

$$\frac{\varphi(x)}{x(x+h)\ldots(x+mh)}$$

можно выдѣлить цѣлую функцію.

Такимъ образомъ, можно сказать, вычисленіе суммы

$$\sum_a^{a+nh}\frac{\varphi(x)}{x(x+h)\ldots(x+mh)},$$

гдѣ $\varphi(x)$ означаетъ какую нибудь цѣлую функцію отъ x, сводится къ вычисленію суммы

$$\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+h}+\frac{1}{a+2h}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)h}.$$

Эту послѣднюю сумму нельзя опредѣлить по формулѣ

$$\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+kh)}=\frac{1}{kh}\left\{\frac{1}{a(a+h)\ldots(a+(k-1)h)}-\frac{1}{(a+nh)\ldots(a+(n+k-1)h)}\right\},$$

такъ какъ k нельзя приравнять нулю.

Конечно при небольшихъ значеніяхъ n вычисленіе суммы

$$\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x}$$

не представляетъ существенныхъ затрудненій.

Для большихъ же значеній n мы дадимъ впослѣдствіи приближенную формулу, при помощи которой можно вычислить сумму $\sum_a^{a+nh}\frac{1}{x}$ съ большею или меньшею точностью.

§ 5. Возьмемъ

$$F(x)=\operatorname{arctg}\frac{A+Bx}{C+Dx}$$

при чемъ предположимъ x настолько большимъ, что при дальнѣйшемъ его возрастаніи дробь

$$\frac{A+Bx}{C+Dx}$$

сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ.

Что же касается arctg, то для опредѣленности условимся придавать этому выраженію то значеніе, которое заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

При этихъ условіяхъ

$$\Delta F(x)=\Delta \operatorname{arctg}\frac{A+Bx}{C+Dx}=\operatorname{arctg}\frac{A+Bh+Bx}{C+Dh+Dx}-\operatorname{arctg}\frac{A+Bx}{C+Dx}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{(A+Bh+Bx)(C+Dx)-(C+Dh+Dx)(A+Bx)}{(C+Dh+Dx)(C+Dx)+(A+Bh+Bx)(A+Bx)}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{h}{p+qx+rx^2},$$

гдѣ

$$p=\frac{A^2+C^2+(CD+AB)h}{BC-AD},\quad q=\frac{2(CD+AB)+h(B^2+D^2)}{BC-AD},\quad r=\frac{B^2+D^2}{BC-AD}.$$

Изъ уравненій связывающихъ коэффиціенты p, q, r съ коэффиціентами A, B, C, D выводимъ

$$\frac{B^2+D^2}{BC-AD}=r,\quad \frac{CD+AB}{BC-AD}=\frac{q-hr}{2},\quad \frac{A^2+C^2}{BC-AD}=\frac{2p-hq+h^2r}{2}$$

и затѣмъ

$$\frac{r(2p-hq+h^2r)}{2}=1+\left(\frac{q-hr}{2}\right)^2.$$

Постараемся теперь по даннымъ

$$q \text{ и } r$$

подобрать

$$p,\ A,\ B,\ C,\ D$$

такъ, чтобы равенство

$$\Delta \operatorname{arctg}\frac{A+Bx}{C+Dx}=\operatorname{arctg}\frac{h}{p+qx+rx^2}$$

дѣйствительно имѣло мѣсто.

Для этой цѣли прежде всего опредѣляемъ коэффиціентъ p изъ уравненія

$$\frac{r(2p-hq+h^2r)}{2}=1+\left(\frac{q-hr}{2}\right)^2,$$

которое даетъ

$$p=\frac{4+q^2-h^2r^2}{4r}.$$

Затѣмъ остается удовлетворить только двумъ уравненіямъ

$$\frac{B^2+D^2}{BC-AD}=r,\quad \frac{CD+AB}{BC-AD}=\frac{q-hr}{2}.$$

Въ виду того, что четыре коэффиціента

$$A,\ B,\ C,\ D$$

должны удовлетворять только двумъ уравненіямъ, можно два изъ этихъ коэффиціентовъ задать произвольно.

Полагая для достиженія возможной простоты

$$C=1,\qquad D=0$$

находимъ

$$B=r,\quad A=\frac{q-hr}{2}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ формуламъ

$$\Delta \operatorname{arctg}\left\{\frac{q-hr}{2}+rx\right\}=\operatorname{arctg}\frac{4rh}{4+q^2-h^2r^2+4rqx+4r^2x^2}$$

и

$$\sum_a^{a+nh}\operatorname{arctg}\frac{4rh}{4+q^2-h^2r^2+4rqx+4r^2x^2}=\operatorname{arctg}\left\{\frac{q+(2n-1)hr}{2}+ra\right\}$$
$$-\operatorname{arctg}\left\{\frac{q-hr}{2}+ra\right\}.$$

А отсюда при $r>0$ выводимъ

$$\sum_a^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{4rh}{4+q^2-h^2r^2+4rqx+4r^2x^2}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left\{\frac{q-hr}{2}+ra\right\}.$$

Напримѣръ

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2a^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(a+1)^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(a+2)^2}+\ldots=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(2a-1),$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}+\ldots=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{2}{3n+5n^2}+\ldots=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2.$$

§ 6. Въ заключеніе этой главы приведемъ нѣсколько разнообразныхъ примѣровъ.

1.

$$\frac{1+a^{2^{x+1}}}{1-a^{2^{x+1}}}-\frac{1+a^{2^x}}{1-a^{2^x}}=-\frac{2a^{2^x}}{1-a^{2^{x+1}}}$$

и потому

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}+\ldots+\frac{a^{2^{x-1}}}{1-a^{2^x}}=\frac{1+a}{2(1-a)}-\frac{1+a^{2^x}}{2(1-a^{2^x})}.$$

Отсюда при

$$\text{мод.}\, a<1$$

вытекаетъ формула

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}+\ldots=\sum_{x=0}^{x=\infty}\frac{a^{2^x}}{1-a^{2^{x+1}}}=\frac{1+a}{2(1-a)}-\frac{1}{2}.$$

2.

$$\left\{\frac{1}{2^{x+1}\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^{x+1}}}\right\}^2-\left\{\frac{1}{2^x\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^x}}\right\}^2=-\left\{\frac{1}{2^{x+1}\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2^{x+1}}}\right\}^2$$

и потому

$$\left(\frac{1}{2\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4\operatorname{Cos}\frac{\theta}{4}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2^x\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2^x}}\right)^2=\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}\theta}\right)^2-\left(\frac{1}{2^x\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^x}}\right)^2.$$

Увеличивая затѣмъ x безпредѣльно, выводимъ

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{1}{2^x\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2^x}}\right)^2=\left(\frac{1}{2\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4\operatorname{Cos}\frac{\theta}{4}}\right)^2+\left(\frac{1}{8\operatorname{Cos}\frac{\theta}{8}}\right)^2+\ldots$$

$$=\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}\theta}\right)^2-\frac{1}{\theta^2}.$$

3.

$$\frac{1}{2^{x+1}}\operatorname{Cotg}\frac{\theta}{2^{x+1}}-\frac{1}{2^x}\operatorname{Cotg}\frac{\theta}{2^x}=\frac{1}{2^{x+1}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2^{x+1}}$$

и потому

$$\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\ldots+\frac{1}{2^x}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2^x}=\frac{1}{2^x}\operatorname{Cotg}\frac{\theta}{2^x}-2\operatorname{Cotg}2\theta.$$

Слѣдовательно

$$\sum_{x=0}^{x=\infty}\frac{1}{2^x}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2^x}=\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}+\ldots=\frac{1}{\theta}-2\operatorname{Cotg}2\theta.$$

4.

$$\left(2^{x+1}\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^{x+1}}\right)^2-\left(2^x\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^x}\right)^2=2^{2x+2}\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^{x+1}}\right)^4$$

и потому

$$\left(\operatorname{Sin}\theta\right)^4+2^2\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}\right)^4+\ldots+2^{2x}\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^x}\right)^4=\left(2^x\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^x}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{Sin}2\theta}{2}\right)^2.$$

Слѣдовательно

$$\sum_{x=0}^{x=\infty}2^{2x}\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2^x}\right)^4=\left(\operatorname{Sin}\theta\right)^4+2^2\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}\right)^4+4^2\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{4}\right)^4+\ldots=\theta^2-\left(\frac{\operatorname{Sin}2\theta}{2}\right)^2.$$

5.

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+x+1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+x)}-\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+x)}{a(a+1)\ldots(a+x-1)}=\frac{(\alpha+1-a)\,\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+x)}{a(a+1)\ldots(a+x)}$$

и потому

$$1+\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{a(a+1)}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+x-1)}{a(a+1)\ldots(a+x-1)}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+x)}{(\alpha+1-a)a(a+1)\ldots(a+x-1)}-\frac{a-1}{\alpha+1-a}.$$

Отсюда при

$$a-\alpha-1>0$$

не трудно вывесть такую формулу

$$1+\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{a(a+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{a(a+1)(a+2)}+\ldots=\frac{a-1}{a-\alpha-1}.$$

Литература.

Monmort. De Seriebus infinitis Tractatus (Philosophical Transactions XXX).

Euler. De progressionibus arcuum circularium quorum tangentes secundum certam legem procedunt (Novi commentarii Acad. Petropolitanae IX).

Herschel. Collection of Examples of the Applications of the Calculus of Finite Differences.

ГЛАВА II.

Формула Эйлера

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\left\{f(b) - f(a)\right\} + \frac{h}{12}\left\{f'(b) - f'(a)\right\} - \ldots$$

§ 7. Возьмемъ формулу Тайлора съ дополнительнымъ членомъ въ видѣ опредѣленнаго интеграла:

$$\theta(x+h) - \theta(x) = h\theta'(x) + \frac{h^2}{2}\theta''(x) + \ldots + \frac{h^k}{k!}\theta^k(x) +$$

$$+ \int_0^h \frac{z^k}{k!}\,\frac{\partial^{k+1}\theta(x+h-z)}{\partial x^{k+1}}\,dz.$$

Здѣсь символъ $k!$ означаетъ произведеніе $1.2.3\ldots k$.

Полагая послѣдовательно

$$\theta(x) = \frac{1}{h}\int^x f(x)\,dx,\quad f(x),\quad hf'(x),\quad h^2f''(x),\ldots,\ h^{m-2}f^{m-2}(x),$$

а $k = \quad m, \qquad m-1,\ m-2,\ \ m-3,\ldots,\qquad 1,$

получаемъ m равенствъ

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \qquad f(x) + \frac{h}{2}f'(x) + \frac{h^2}{3!}f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{m-1}}{m!}f^{m-1}(x) + R_1$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{m-1}}{m-1!}f^{m-1}(x) + R_2$$

$$h\Delta f'(x) = hf'(x+h) - hf'(x) = \ h^2f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{m-1}}{m-2!}f^{m-1}(x) + R_3$$

. . . .

$$h^{m-2}\Delta f^{m-2}(x) = h^{m-2}f^{m-2}(x+h) - h^{m-2}f^{m-2}(x) = h^{m-1}f^{m-1}(x) + R_m$$

гдѣ

$$R_1 = \int_0^h \frac{z^m}{m!}\,\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\partial x^m}\,dz,\qquad R_2 = \int_0^h \frac{hz^{m-1}}{m-1!}\,\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\partial x^m}\,dz,$$

$$R_3 = \int_0^h \frac{h^2z^{m-2}}{m-2!}\,\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\partial x^m}\,dz,\ldots\ldots,\ R_m = \int_0^h h^{m-1}z\,\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\partial x^m}\,dz.$$

Изъ всѣхъ этихъ равенствъ не трудно вывесть такое

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx + A_1\Delta f(x) + A_2h\Delta f'(x) + \ldots + A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{m-2}(x) =$$

$$= f(x) + C_1hf'(x) + C_2h^2f''(x) + C_3h^3f'''(x) + \ldots$$

$$+ C_{m-1}h^{m-1}f^{m-1}(x) + R,$$

гдѣ

$$C_1 = \frac{1}{2} + A_1,\ C_2 = \frac{1}{3!} + \frac{A_1}{2} + A_2,\ldots,C_{m-1} = \frac{1}{m!} + \frac{A_1}{m-1!} + \frac{A_2}{m-2!} + \ldots + \frac{A_{m-2}}{2} + A_{m-1}$$

и

$$R = R_1 + A_1R_2 + A_2R_3 + \ldots + A_{m-1}R_m,$$

а коэффиціентамъ

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{m-1}$$

можно давать какія угодно значенія.

Отсюда, давая коэффиціентамъ

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{m-1}$$

тѣ значенія, которыя опредѣляются уравненіями

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2}+A_1=0\,, \\[2ex]
\frac{1}{3!}+\frac{A_1}{2}+A_2=0, \\[2ex]
\frac{1}{4!}+\frac{A_1}{3!}+\frac{A_2}{2}+A_3=0, \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\frac{1}{m!}+\frac{A_1}{m-1!}+\frac{A_2}{m-2!}+\frac{A_3}{m-3!}+\ldots\ldots+\frac{A_{m-2}}{2}+A_{m-1}=0
\end{array}\right\}\ (7),$$

выводимъ

$$f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(z)\,dz+A_1\Delta f(x)+A_2h\Delta f'(x)+\ldots+A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{m-2}(x)$$

$$-\int_0^h\varphi_m(z)\,\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\,\partial x^m}\,dz \qquad (8),$$

гдѣ

$$\varphi_m(z)=\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{h\,z^{m-1}}{m-1!}+A_2\frac{h^2z^{m-2}}{m-2!}+\ldots.+A_{m-1}h^{m-1}z \qquad (9).$$

Полагая затѣмъ

$$x=a,\ \ a+h,\ \ a+2h,\ldots,\ \ a+(n-1)h$$

и обозначая для краткости $a+nh$ одною буквою b, получаемъ n равенствъ

$$f(a)=\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(z)dz+A_1\Delta f(a)+\ldots+A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{m-2}(a)$$

$$-\int_0^h f^m(a+h-z)\,\varphi_m(z)\,\frac{dz}{h},$$

$$f(a+h)=\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}f(z)dz+A_1\Delta f(a+h)\ldots+A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{m-2}(a+h)$$

$$-\int_0^h f^m(a+2h-z)\,\varphi_m(z)\,\frac{dz}{h},$$

. . . .

$$f(b-h)=\frac{1}{h}\int_{b-h}^{b}f(z)dz+A_1\Delta f(b-h)\ldots+A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{m-2}(b-h)$$

$$-\int_0^h f^m(b-z)\,\varphi_m(z)\,\frac{dz}{h},$$

изъ которыхъ посредствомъ сложенія выводимъ формулу

$$\sum_a^b f(x)=\frac{1}{h}\int_a^b f(z)dz+A_1\big\{f(b)-f(a)\big\}+A_2h\big\{f'(b)-f'(a)\big\}+\ldots..$$
$$+A_{m-1}h^{m-2}\big\{f^{m-2}(b)-f^{m-2}(a)\big\}-\int_0^h\varphi_m(z)\sum_{x=a}^{x=b}\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\,\partial x^m}dz \qquad (10)$$

извѣстную подъ именемъ **формулы Эйлера или Маклорена.**

Выраженіе

$$-\int_0^h\varphi_m(z)\sum_{x=a}^{x=b}\frac{\partial^m f(x+h-z)}{h\,\partial x^m}dz=-\int_0^h\varphi_m(z)\big\{f^m(a+h-z)+\ldots+f^m(b-z)\big\}\frac{dz}{h}$$

называется **дополнительнымъ членомъ** формулы Эйлера.

Числу m можно давать различныя значенія, начиная съ 2.