ПРИБАВЛЕНІЕ

КЪ РУКОВОДСТВУ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Д. Бобылевъ,

Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора Александра I.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1898.

Печатано по распоряженію Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Именованныя величины и векторы, входящіе въ формулы теоретической механики.

A) Векторы: скорость, количество движенія, ускореніе, сила, линейный моментъ силы, линейный моментъ количества движенія.

B) Невекторіальныя величины: живая сила, работа силы.

Механика матеріальной точки.

Прибавленіе къ руководству теоретической механики.

Именованныя величины и векторы, входящіе въ формулы теоретической механики.

Въ курсѣ «Основъ механики» было объяснено значеніе почти всѣхъ количественно-измѣняемыхъ величинъ, встрѣчающихся въ механикѣ, а именно: промежутковъ времени, величины массы, объема, плотности, живой силы, работы, энергіи, длины, скорости, ускоренія, количества движенія, силы, момента силы, момента количества движенія, угловой скорости, углового ускоренія и др. Каждое изъ этихъ количествъ измѣряется единицею одного съ нимъ наименованія и величина его можетъ быть выражена произведеніемъ отвлеченнаго числа на величину избранной единицы, напримѣръ:

звѣздныя сутки $= 86164{,}09$ [секунда]

масса земнаго шара $= 6{,}14\,.\,(10)^{27}$ [граммъ]

средній радіусъ земли $= 6{,}3709\,.\,(10)^{8}$ [сантиметръ]

$$\left.\begin{matrix}\text{ускореніе силы тяжести}\\ \text{въ Парижѣ на уровнѣ моря}\end{matrix}\right\} = 680{,}94\,\frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2};$$

здѣсь: [секунда], [граммъ], [сантиметръ] суть символы величинъ основныхъ единицъ: секунды средняго времени, массы грамма и длины сантиметра; отношеніе: $\frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2}$ есть символъ величины ускоренія равноускореннаго движенія, при которомъ длина, проходимая въ первую секунду времени отъ положенія покоя равна половинѣ сантиметра [1]).

Такимъ образомъ всѣ вышесказанныя количества можно разсматривать какъ величины именованныя, но для составленія графиковъ

[1]) См. Основы механики А. С. Домогарова, Введеніе стр. 42—47, Кинематика, стр. 21—23.

и чертежей всѣ эти количества могутъ быть представляемы или изображаемы въ видѣ длинъ или площадей, такъ, напримѣръ, при построеніи графика разстояній [1]) величины промежутковъ времени t изображаются длинами, отложенными по оси временъ отъ точки O; при построеніи годографа [2]) скоростей величины скоростей изображаются радіусами векторами годографа; величина момента какого-либо вектора относительно точки O [3]) можетъ быть изображена удвоенною площадью треугольника (OAB), имѣющаго вершиною точку O и основаніемъ векторъ, моментъ котораго опредѣляется.

Въ «Основахъ механики» были изложены начальныя основанія ученія о векторахъ, такъ какъ оно имѣетъ важное приложеніе въ механикѣ. Дѣйствительно, изъ числа вышеупомянутыхъ понятій, нѣкоторыя представляются какъ векторы, т. е. какъ прямолинейныя длины имѣющія нѣкоторое направленіе; такъ, *скорость*, *ускореніе*, *силу*, *количество движенія*, *линейный моментъ силы*, *линейный моментъ количества движенія*, даже *угловую скорость* и *угловое ускореніе* мы представляемъ себѣ въ видѣ прямолинейныхъ отрѣзковъ, проведенныхъ изъ нѣкоторой точки въ нѣкоторомъ направленіи, такъ что вмѣстѣ съ представленіемъ о величинѣ каждаго такого понятія непремѣнно сопряжено представленіе о его направленіи. Такія механическія величины мы будемъ называть *величинами векторіальными* или *векторами*. Къ числу векторовъ принадлежатъ радіусы векторы какой-либо кривой; началомъ радіусовъ векторовъ служитъ или начало координатъ или какая-нибудь другая точка, изъ которой всѣ радіусы векторы исходятъ. Длина какого-либо отрѣзка прямой, проведеннаго изъ какой-либо точки пространства въ какомъ-либо направленіи, служитъ основнымъ представленіемъ того, что собственно и называется векторомъ.

Съ механическими понятіями о *времени*, *массѣ*, *объемѣ*, *живой силѣ*, *работѣ*, *энергіи* соединяется представленіе только о величинахъ этихъ количествъ; представленіе о какомъ-либо направленіи не играетъ здѣсь никакой роли. Такія механическія величины можно назвать *невекторіальными*; къ числу ихъ можетъ быть причислена длина, разсматриваемая какъ разстояніе между двумя какими-либо

---

[1]) Основы механики, Кинематика, стр. 2-я.

[2]) Тамъ же, стр. 27—28.

[3]) Основы механики, Введеніе, стр. 28—29.

точками кривой или прямой линіи; напримѣръ, перемѣщеніе точки по траэкторіи и длину пути приходится разсматривать какъ величины невекторіальныя.

При изложеніи курса теоретической механики можно воспользоваться всѣмъ тѣмъ, что изложено въ курсѣ «Основъ механики»; прежде всего составимъ выраженія разныхъ векторіальныхъ и невекторіальныхъ величинъ, упомянутыхъ выше и вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлаемъ нѣкоторыя добавленія о предметахъ и обстоятельствахъ, не находящихся въ курсѣ «Основъ».

На стр. 15—17 курса «Основъ» изложено понятіе о геометрическомъ суммированіи и вычитаніи векторовъ. Равенство:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \ldots + \overline{V}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(I)}$$

выражающее, что векторъ V есть геометрическая сумма векторовъ V_1, V_2, V_3, ... V_n, есть равенство символическое, оно замѣняетъ собою три слѣдующія алгебраическія равенства:

$$\left.\begin{aligned} V\cos(VX) &= V_1\cos(V_1X) + V_2\cos(V_2X) + \ldots + V_n\cos(V_nX) \\ V\cos(VY) &= V_1\cos(V_1Y) + V_2\cos(V_2Y) + \ldots + V_n\cos(V_nY) \\ V\cos(VZ) &= V_1\cos(V_1Z) + V_2\cos(V_2Z) + \ldots + V_n\cos(V_nZ) \end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

гдѣ X, Y, Z суть оси прямолинейныхъ координатъ, прямоугольныхъ или косоугольныхъ или же три какія-либо направленія проведенныя изъ одной точки и не находящіяся въ одной плоскости, причемъ направленія эти могутъ быть неизмѣнными или же могутъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Такое же значеніе имѣетъ и символическое равенство:

$$\overline{W} = \overline{W}_1 - \overline{W}_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(III)}$$

выражающее, что векторъ W есть геометрическая разность векторовъ W_1 (уменьшаемаго) и W_2 (вычитаемаго).

Символическими равенствами (I) и (III) выгодно пользоваться по ихъ краткости, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется выписывать трехъ алгебраическихъ равенствъ, ими замѣняемыхъ.

Если слагаемые или вычитаемые векторы параллельны плоскости XY, то всѣ косинусы угловъ, составляемые съ осью Z-овъ равны нулю и въ третьемъ изъ равенствъ (II) обѣ части равенства будутъ тождественно равны нулю.

A) Векторы: скорость, количество движенія, ускореніе, сила, линейный моментъ силы, линейный моментъ количества движенія.

Скорость и проекціи ея на оси координатъ.

Изъ курса «Основъ механики» извѣстно [1]), что проекціи на оси прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ скорости v выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos(vX) = x' = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} = f'_1(t) \\ v_y &= v\cos(vY) = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2(t)}{dt} = f'_2(t) \\ v_z &= v\cos(vZ) = z' = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3(t)}{dt} = f'_3(t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathrm{IV})$$

и что величина скорости поэтому равна:

$$v = +\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2},$$

а косинусы угловъ направленія ея съ осями координатъ равны отношеніямъ $(x' : v)$, $(y' : v)$, $(z' : v)$.

Здѣсь x, y, z,—прямоугольныя прямолинейныя координаты точки, равны проекціямъ радіуса вектора r ея на оси координатъ, а измѣненіе координатъ съ теченіемъ времени выражается данными функціями отъ t:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{V})$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда окажется удобнѣе выразить положеніе точки на плоскости въ полярныхъ координатахъ, а положеніе въ пространствѣ въ цилиндро-полярныхъ координатахъ, нужно имѣть выраженія проекцій скорости на оси этихъ координатъ.

Осями полярныхъ координатъ на плоскости называются два взаимно-перпендикулярныя направленія, проведенныя изъ мѣста точки M на плоскости, а именно: положительная ось α—по продолженію радіуса вектора $\rho = OM$, проведеннаго изъ полюса O и положительная ось β, проведенная перпендикулярно къ оси α въ томъ направленіи, въ которомъ будетъ двигаться точка M, если уголъ θ, составляемый радіусомъ векторомъ OM съ полярною осью OX, бу-

[1]) „Основы механики", Кинематика стр. 18.

детъ увеличиваться, между тѣмъ какъ длина радіуса вектора OM будетъ оставаться постоянною. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, прямоугольныя координаты точки M выражаются въ полярныхъ такъ:

$$x = \rho \cos\theta; \; y = \rho \sin\theta,$$

а полярныя координаты въ прямоугольныхъ—такимъ образомъ:

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \; \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{VI})$$

Ось α составляетъ съ осями X и Y углы θ и $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, ось β — съ тѣми же осями углы $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ и θ; поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha X) &= \cos\theta = \frac{x}{\rho}, \; \cos(\alpha Y) = \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \\ \cos(\beta X) &= -\sin\theta = -\frac{y}{\rho}, \; \cos(\beta Y) = \cos\theta = \frac{x}{\rho} \end{aligned}\right\} . \quad (R).$$

Если точка M движется не выходя изъ плоскости XY, то проекціи скорости ея на направленія α и β выразятся (по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи) такъ:

$$v\cos(v\alpha) = v\cos(vX)\cos(\alpha X) + v\cos(vY)\cos(\alpha Y),$$

$$v\cos(v\beta) = v\cos(vX)\cos(\beta X) + v\cos(vY)\cos(\beta Y).$$

Замѣнивъ здѣсь проекціи скорости на оси X и Y и косинусы угловъ (αX), (αY), (βX), (βY) выраженіями, приведенными выше, получимъ:

$$v\cos(v\alpha) = \frac{x'x + y'y}{\rho}$$

$$v\cos(v\beta) = \frac{xy' - yx'}{\rho}.$$

Возьмемъ теперь производныя по t отъ обѣихъ частей уравненій (VI), получимъ:

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = xx' + yy', \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{VII})$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{x^2},$$

послѣднее равенство можно представить такъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{\rho^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{VIII})$$

потому что $x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$.

Изъ (VII) и (VIII) слѣдуетъ, что составленныя для $v \cos(v\alpha)$ и $v \cos(v\beta)$ выраженія приведутся къ слѣдующему виду;

$$\left.\begin{aligned} v \cos(v\alpha) &= \frac{d\rho}{dt} = \rho' \\ v \cos(v\beta) &= \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{IX})$$

Такъ какъ оси α и β взаимно-ортогональны, то величина квадрата скорости выразится суммою квадратовъ ея проекцій на оси α и β:

$$v^2 = (\rho')^2 + \rho^2 (\theta')^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{X})$$

Цилиндро-полярныя координаты точки M, находящейся внѣ плоскости XY, суть z и полярныя координаты проекціи M_{xy} точки на плоскость XY; оси координатъ суть направленія α и β проведенныя изъ мѣста точки въ пространствѣ параллельно тѣмъ осямъ, которыя проведены въ плоскости XY изъ точки M_{xy} и обозначены тѣми же буквами. Третья ось, проведенная изъ точки M, параллельна положительной оси Z-овъ. Проекціи скорости v на эти оси (которыя взаимно-ортогональны) выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} v \cos(v\alpha) &= \frac{d\rho}{dt} = \rho' \\ v \cos(v\beta) &= \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta' \\ v \cos(vZ) &= \frac{dz}{dt} = z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{XI})$$

Такъ какъ оси взаимно-перпендикулярны, то величина квадрата скорости выразится такъ:

$$v^2 = (\rho')^2 + \rho^2 (\theta')^2 + (z')^2 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{XII})$$

Отъ этой координатной системы легко перейти къ *сферическимъ координатамъ* r, φ, θ, гдѣ r есть радіусъ векторъ OM точки, а φ—уголъ составляемый имъ съ положительною осью Z-овъ. Очевидно z равно проекціи OM на ось Z-овъ, а $\rho = OM_{xy}$ есть проекція OM на плоскость XY, такъ что $z = r\cos\varphi$, $\rho = r\sin\varphi$ и поэтому:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XIII)}$$

Осями координатъ служатъ три взаимно-ортогональныя направленія, проведенныя изъ точки M, а именно: ось α—по продолженію радіуса вектора r, ось β—перпендикулярно къ α въ плоскости ZOM и притомъ въ такую сторону, въ какую будетъ перемѣщаться точка M, если r и θ останутся постоянными, а уголъ φ будетъ увеличиваться; наконецъ ось γ перпендикулярно къ α и β въ ту сторону, куда будетъ перемѣщаться точка M, если r и φ останутся постоянными, а уголъ θ будетъ увеличиваться.

Такъ какъ $z = r\cos\varphi$ и $\rho = \sin\varphi$, то, взявъ производныя отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ по t, получимъ:

$$z' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,.\,\varphi',$$

$$\rho' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,.\,\varphi';$$

отсюда, по возвышеніи въ квадратъ обѣихъ частей этихъ равенствъ и по сложеніи, найдемъ:

$$(\rho')^2 + (z')^2 = (r')^2 + r^2(\varphi')^2.$$

Стало быть, на основаніи равенства (XII), квадратъ скорости выразится въ сферическихъ координатахъ такъ:

$$v^2 = (r')^2 + r^2(\varphi')^2 + r^2\sin^2\varphi\,(\theta')^2 \quad \ldots \quad \text{(XIV)}$$

Ось γ сферической системы координатъ очевидно совпадаетъ съ осью β цилиндро-полярной системы, поэтому $v\cos(v\gamma)$ по формуламъ (XI) равна $\rho\theta'$ или $r\sin\varphi\,.\,\theta'$; величины же r' и $r\,.\,\varphi'$ суть проекціи скорости на оси α и β сферической системы, въ чемъ нетрудно убѣдиться.

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v\alpha) &= r' \\ v\cos(v\beta) &= r\varphi' \\ v\cos(v\gamma) &= r\sin\varphi.\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XV)}.$$

Количество движенія матеріальной точки и проекціи на его оси координатъ.

Количество движенія матеріальной точки массы m есть векторъ, имѣющій величину равную mv (гдѣ v скорость точки) и направленіе, совпадающее съ направленіемъ скорости. Поэтому проекціи количества движенія на оси координатъ X, Y, Z выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} mv\cos(vX) &= mx' \\ mv\cos(vY) &= my' \\ mv\cos(vZ) &= mz' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XVI)}$$

а если точка движется въ плоскости (XY), то проекціи количества движенія на оси α и β полярной системы координатъ выразятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} mv\cos(v\alpha) &= m\rho' \\ mv\cos(v\beta) &= m\rho\theta' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XVII)}$$

Единицею количества движенія служитъ количество движенія матеріальной точки, масса которой равна единицѣ массы, а скорость равна единицѣ скорости, такъ что символъ единицы количества движенія есть

$$\frac{[M]\,.\,[L]}{[T]}.$$

Въ системѣ основныхъ единицъ *сантиметръ-граммъ-секунда*, единица количества движенія будетъ величина:

$$\frac{[\text{граммъ}]\,.\,[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]}.$$

Ускореніе и проекціи его на оси координатъ, на направленіе скорости и на главную нормаль траекторіи.

Въ курсѣ «Основъ механики», въ Кинематикѣ, на страницахъ 41 и 42 приведены выраженія проекцій ускоренія точки на оси прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ. Величина ускоренія тамъ обозначена буквою u, но такъ какъ въ составленномъ руководствѣ къ курсу теоретической механики этотъ знакъ имѣетъ иное значеніе, то здѣсь ускореніе будетъ обозначено, какъ это уже сдѣлано въ руководствѣ, знакомъ $\dot{v}$.

Проекціи ускоренія $\dot{v}$ на оси прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}X) &= x'' = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Y) &= y'' = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Z) &= z'' = \frac{d^2z}{dt^2}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (\mathrm{XVIII}),$$

а потому величина ускоренія равна

$$\dot{v} = +\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \quad \ldots \; (\mathrm{XIX}),$$

и косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ его съ осями координатъ выражаются отношеніями:

$$\frac{x''}{\dot{v}}\,, \quad \frac{y''}{\dot{v}}\,, \quad \frac{z''}{\dot{v}}\,.$$

Чтобы составить выраженія проекцій ускоренія на оси полярныхъ координатъ, если движущаяся точка остается въ плоскости XY, составимъ равенства:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = \dot{v}\cos(\dot{v}X)\cos(\alpha X) + \dot{v}\cos(\dot{v}Y)\cos(\alpha Y),$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \dot{v}\cos(\dot{v}X)\cos(\beta X) + \dot{v}\cos(\dot{v}Y)\cos(\beta Y),$$

или, что то же самое (см. выше формулы (XVIII) и (R)):

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\alpha) = \frac{x''x + y''y}{\rho}\,,$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\beta) = \frac{xy'' - yx''}{\rho}\,.$$

Изъ формулъ (VII) и (VIII) мы имѣемъ: $\rho\frac{d\rho}{dt} = xx' + yy'$ и

$$xx' + yy' = \rho\rho',$$

$$xy' - yx' = \rho^2\theta'.$$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{\rho^2}$

Взявъ производныя отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ по t, получимъ:

$$xx'' + yy'' + (x')^2 + (y')^2 = \rho\rho'' + (\rho')^2$$

$$xy'' - yx'' = \frac{d(\rho^2\theta')}{dt}\,;$$

но

$$v^2 = (x')^2 + (y')^2 = (\rho')^2 + \rho^2 (\theta')^2,$$

поэтому

$$xx'' + yy'' = \rho\rho'' + (\rho')^2 - (\rho')^2 - \rho^2 (\theta')^2,$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} \alpha) &= \rho'' - \rho (\theta')^2, \\ \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} \beta) &= \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \theta')}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{XX}).$$

Если точка не остается въ плоскости XY и мы выражаемъ положеніе ея въ цилиндро-полярныхъ координатахъ, то проэкціи ускоренія на оси α, β, Z выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} \alpha) &= \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} \beta) &= \frac{1}{\rho} \frac{d\left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} \\ \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} \gamma) &= \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{XXI}).$$

На стр. 33—37 кинематической части «Основъ механики» выведены выраженія проекцій ускоренія на направленіе скорости и на направленіе главной нормали (къ центру кривизны) и доказано, что полное ускореніе всегда заключается въ плоскости кривизны. Означая черезъ ρ величину радіуса кривизны и направленіе главной нормали, черезъ k кривизну кривой и черезъ b направленіе *бинормали* или второй нормали, можемъ написать слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} v) &= \frac{dv}{dt} \\ \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} \rho) &= \frac{v^2}{\rho} = kv^2 \\ \overset{\bullet}{v} \cos (\overset{\bullet}{v} b) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{XXII}).$$

На стр. 21 (Основы, кинематика) сказано о единицѣ ускоренія.