

735

ПРИБАВЛЕНИЕ КЪ РУКОВОДСТВУ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.



СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ,

Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.

1898.

Печатано по распоряженію Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

О ГЛАВЛЕНИЕ.

Именованные величины и векторы, входящие въ формулы теоретической механики.

A) Векторы: скорость, количество движенія, ускореніе, сила, линейный моментъ силы, линейный моментъ количества движенія.

стр.

Скорость и проекціи ея на оси координатъ	4
Количество движенія материальной точки и проекціи на его оси координатъ	8
Ускореніе и проекціи его на оси координатъ, на направление скорости и на главную нормаль траекторіи.	8
Сила и проекціи ея на оси координатъ	11
Моментъ силы вокругъ точки. Линейный моментъ силы и проекціи его на оси координатъ	11
Моменты количества движенія материальной точки.	14

B) Невекторіальные величины: живая сила, работа силы.

Живая сила материальной точки	15
Работа силы	15

Механика материальной точки.

§ 1. Материальная точка	17
§ 2. Основные начала механики иъ примененіи къ материальной точкѣ	17
§ 3. Силы постоянные и различные виды переменныхъ силъ	18
§ 4. Дифференциальные уравненія движенія свободной материальной точки	19
§ 5. Уравненія равновѣсія свободной материальной точки. Положенія равновѣсія	20

§ 6. Дифференціальна уравненія руху свободної матеріальної точки можна розглядати як уравненія рівноваги. Рухова сила. Сила інерції	21
§ 7. Що називається розв'язками дифференціальних уравнень руху свободної матеріальної точки, що знаходиться під дією кількох сил?	22
§ 8. Розв'язки дифференціальних уравнень руху можуть бути отримані в вигляді рядів, розташованих за степенями промежуткового часу. Начальний момент і начальні обставини руху	23
§ 9. Інтегриали дифференціальних уравнень руху свободної матеріальної точки. Перші і другі інтегриали	27
§ 10. Розв'язки деяких з них залежать від прямолінійного руху	34
§ 11. Розв'язок деяких з них залежить від руху точок на площині	43
§ 12. Оський закон змінення моменту кількості руху свободної матеріальної точки	55
§ 13. Умови, при яких має місце закон площадей в одній площині або в будь-якій площині, проходящій через початок координат	56
§ 14. Оський закон змінення живої сили свободної матеріальної точки	58
§ 15. Сили, що мають силову або потенціальну функцію. Потенціальна функція та поверхні рівності. Параметри поверхні рівності. Дифференціальний параметр потенціальної функції	59
§ 16. Інтегральний вираз, що відповідає закону збереження повної енергії	63
§ 17. Дифференціальні уравнення руху точки, яка знаходиться на державлючій поверхні. Нормальна реакція поверхні. Гладкість поверхні	64
§ 18. Розв'язок питань про рух матеріальної точки по гладкій державлючій поверхні при заданих силах	70
§ 19. Закон змінення живої сили при руху матеріальної точки по гладкій неподвижній поверхні	71
§ 20. Закон збереження повної енергії для матеріальної точки, яка знаходиться по гладкій державлючій неподвижній поверхні, якщо діючі на неї сили мають потенціальну функцію	72
§ 21. Умови, при яких рух матеріальної точки по гладкій державлючій неподвижній поверхні відповідає закону площадей в площині, перпендикулярній осі обертання поверхні	—
§ 22. Приміри розв'язку питань про рух матеріальної точки на поверхні. Рух матеріальної точки на поверхні без дії заданої сили	73
§ 23. Рівновага матеріальної точки на гладкій державлючій поверхні. Уравнення та умови рівноваги	79
§ 24. Дифференціальні уравнення руху матеріальної точки на гладкій	

III

СТР.

поверхности можно рассматривать, какъ уравненія равновѣсія. Потерянная сила. Давленіе точки на поверхность	80
§ 25. Поверхность, не удерживающая съ одной стороны. Условіе равновѣсія материальной точки, находящейся на гладкой неудерживающей поверхности	81
§ 26. Треніе. Условіе равновѣсія материальной точки на негладкихъ поверхностяхъ удерживающихъ или неудерживающихъ	82
§ 27. Дифференціальная уравненія движенія материальной точки, остающейся на гладкой неподвижной кривой. Законъ живой силы	84
§ 28. Законъ сохраненія полной энергіи при движеніи материальной точки по гладкой неподвижной кривой, если приложенные къ точкѣ силы имѣютъ потенціальную функцию	86
§ 29. Реакція кривой линіи и давленіе на нее. Центробѣжная сила	—
§ 30. Уравненія и условія равновѣсія материальной точки на неподвижной гладкой кривой линіи	88
§ 31. Дифференціальные уравненія материальной точки по гладкой неподвижной кривой могутъ быть разсмотримы какъ уравненія равновѣсія. Потерянная сила	89
§ 32. Рѣшенія вопросовъ о движеніи материальной точки по неподвижной удерживающей кривой и подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ потенціальную функцию	90

Прибавление къ руководству теоретической механики.

Именованные величины и векторы, входящие въ формулы теоретической механики.

Въ курсѣ «Основы механики» было объяснено значение почти всѣхъ количественно-измѣняемыхъ величинъ, встречающихся въ механикѣ, а именно: промежутковъ времени, величины массы, объема, плотности, живой силы, работы, энергіи, длины, скорости, ускоренія, количества движенія, силы, момента силы, момента количества движенія, угловой скорости, углового ускоренія и др. Каждое изъ этихъ количествъ измѣряется единицею одного съ нимъ наименования и величина его можетъ быть выражена произведеніемъ отвлеченаго числа на величину избранной единицы, напримѣръ:

$$\text{звездныя сутки} = 86164,09 \text{ [секунда]}$$

$$\text{масса земного шара} = 6,14 \cdot (10)^{27} \text{ [граммъ]}$$

$$\text{средній радиусъ земли} = 6,3709 \cdot (10)^8 \text{ [сантиметръ]}$$

$$\text{ускореніе силы тяжести } \left. \right\} = 680,94 \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2};$$

въ Парижъ на уровнѣ моря

здесь: [секунда], [граммъ], [сантиметръ] суть символы величинъ основныхъ единицъ: секунды средняго времени, массы грамма и длины сантиметра; отношение: $\frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}$ есть символъ величины ускоренія равноускоренного движенія, при которомъ длина, проходимая въ первую секунду времени отъ положенія покоя равна половинѣ сантиметра¹).

Такимъ образомъ всѣ вышесказанные количества можно рассматривать какъ величины именованные, но для составленія графиковъ

¹⁾ См. Основы механики А. С. Домогарова, Введение стр. 42—47, Кинематика, стр. 21—23.

и чертежей всѣ эти количества могутъ быть представляемы или изображаемы въ видѣ длинъ или площадей, такъ, напримѣръ, при построеніи графика разстояній ¹⁾ величины промежутковъ времени t изображаются длинами, отложенными по оси времени отъ точки O ; при построеніи годографа ²⁾ скоростей величины скоростей изображаются радиусами векторами годографа; величина момента какого-либо вектора относительно точки O ³⁾ можетъ быть изображена удвоеною площадью треугольника (OAB), имѣющаго вершину точку O и основаніемъ векторъ, моментъ котораго опредѣляется.

Въ «Основахъ механики» были изложены начальныя основанія ученія о векторахъ, такъ какъ оно имѣть важное приложеніе въ механикѣ. Дѣйствительно, изъ числа вышеупомянутыхъ понятій, нѣкоторыя представляются какъ векторы, т. е. какъ прямолинейныя длины имѣющія нѣкоторое направленіе; такъ, *скорость*, *ускореніе*, *силу*, *количество движения*, *линейный моментъ силы*, *линейный моментъ количества движения*, даже *угловую скорость* и *угловое ускореніе* мы представляемъ себѣ въ видѣ прямолинейныхъ отрѣзковъ, проведенныхъ изъ нѣкоторой точки въ нѣкоторомъ направленіи, такъ что вмѣстѣ съ представлениемъ о величинѣ каждого такого понятія непремѣнно сопряжено представление о его направленіи. Такія механическія величины мы будемъ называть *величинами векторіальными* или *векторами*. Къ числу векторовъ принадлежать радиусы векторы какой-либо кривой; началомъ радиусовъ векторовъ служить или начало координатъ или какая-нибудь другая точка, изъ которой всѣ радиусы векторы исходятъ. Длина какого-либо отрѣзка прямой, проведенного изъ какой-либо точки пространства въ какомъ-либо направленіи, служить основнымъ представлениемъ того, что собственно и называется векторомъ.

Съ механическими понятіями о *времени*, *массѣ*, *объемѣ*, *живой силѣ*, *работѣ*, *энергіи* соединяется представление только о величинахъ этихъ количествъ; представление о какомъ-либо направленіи не играетъ здѣсь никакой роли. Такія механическія величины можно назвать *невекторіальными*; къ числу ихъ можетъ быть причислена длина, рассматриваемая какъ разстояніе между двумя какими-либо

¹⁾ Основы механики, Кинематика, стр. 2-я.

²⁾ Тамъ же, стр. 27—28.

³⁾ Основы механики, Введеніе, стр. 28—29.

точками кривой или прямой лині; напримѣръ, перемѣщеніе точки по траекторіи и длину пути приходится рассматривать какъ величины невекторіальныя.

При изложениі курса теоретической механики можно воспользоваться всѣмъ тѣмъ, что изложено въ курсѣ «Основы механики»; прежде всего составимъ выраженія разныхъ векторіальныхъ и невекторіальныхъ величинъ, упомянутыхъ выше и вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлаемъ нѣкоторыя добавленія о предметахъ и обстоятельствахъ, не находящихся въ курсѣ «Основы».

На стр. 15—17 курса «Основы» изложено понятіе о геометрическомъ суммированіи и вычитаніи векторовъ. Равенство:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \dots + \overline{V}_n \quad (I)$$

выражающее, что векторъ \overline{V} есть геометрическая сумма векторовъ V_1 , V_2 , V_3 , ..., V_n , есть равенство символическое, оно замѣняетъ собою три слѣдующія алгебраическихъ равенства:

$$\left. \begin{aligned} V \cos(VX) &= V_1 \cos(V_1 X) + V_2 \cos(V_2 X) + \dots + V_n \cos(V_n X) \\ V \cos(VY) &= V_1 \cos(V_1 Y) + V_2 \cos(V_2 Y) + \dots + V_n \cos(V_n Y) \\ V \cos(VZ) &= V_1 \cos(V_1 Z) + V_2 \cos(V_2 Z) + \dots + V_n \cos(V_n Z) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

гдѣ X , Y , Z суть оси прямолинейныхъ координатъ, прямоугольныхъ или косоугольныхъ или же три какія-либо направленія проведенные изъ одной точки и не находящіяся въ одной плоскости, причемъ направленія эти могутъ быть неизмѣнными или же могутъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Такое же значеніе имѣеть и символическое равенство:

$$\overline{W} = \overline{W}_1 - \overline{W}_2, \quad (III)$$

выражающее, что векторъ \overline{W} есть геометрическая разность векторовъ W_1 (уменьшаемаго) и W_2 (вычитаемаго).

Символическими равенствами (I) и (III) выгодно пользоваться по ихъ краткости, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется выписывать трехъ алгебраическихъ равенствъ, ими замѣняемыхъ.

Если слагаемые или вычитаемые векторы параллельны плоскости XY , то всѣ косинусы угловъ, составляемые съ осью Z -овъ равны нулю и въ третьемъ изъ равенствъ (II) обѣ части равенства будутъ тождественно равны нулю.

А) Векторы: скорость, количество движения, ускорение, сила, линейный моментъ силы, линейный моментъ количества движения.

Скорость и проекціи ея на оси координатъ.

Изъ курса «Основъ механики» известно¹⁾, что проекціи на оси прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ скорости v выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos(vX) = x' = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} = f'_1(t) \\ v_y &= v \cos(vY) = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2(t)}{dt} = f'_2(t) \\ v_z &= v \cos(vZ) = z' = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3(t)}{dt} = f'_3(t) \end{aligned} \right\} \dots \quad (\text{IV})$$

и что величина скорости поэтому равна:

$$v = + \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2},$$

а косинусы угловъ направлениія ея съ осями координатъ равны отношеніямъ $(x':v)$, $(y':v)$, $(z':v)$.

Здѣсь x , y , z —прямоугольныя прямолинейныя координаты точки, равны проекціямъ радиуса вектора r ея на оси координатъ, а измѣненіе координатъ съ теченіемъ времени выражается данными функциями отъ t :

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \dots \quad (\text{V})$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда окажется удобнѣе выразить положеніе точки на плоскости въ полярныхъ координатахъ, а положеніе въ пространствѣ въ цилиндро-полярныхъ координатахъ, нужно имѣть выраженія проекцій скорости на оси этихъ координатъ.

Осями полярныхъ координатъ на плоскости называются два взаимно-перпендикулярныя направленія, проведенные изъ мѣста точки M на плоскости, а именно: положительная ось α —по продолженію радиуса вектора $r = OM$, проведенного изъ полюса O и положительная ось β , проведенная перпендикулярно къ оси α въ томъ направленіи, въ которомъ будетъ двигаться точка M , если уголъ θ , составляемый радиусомъ OM съ полярною осью OX , бу-

¹⁾ „Основы механики“, Кинематика стр. 18.

деть увеличиваться, между тѣмъ какъ длина радиуса вектора OM будетъ оставаться постоянною. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, прямоугольныя координаты точки M выражаются въ полярныхъ такъ:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta,$$

а полярныя координаты въ прямоугольныхъ—такимъ образомъ:

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \dots \dots \dots \quad (\text{VI})$$

Ось α составляеть съ осями X и Y углы θ и $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, ось β — съ тѣми же осями углы $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ и θ ; поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha X) &= \cos \theta = \frac{x}{\rho}, \quad \cos(\alpha Y) = \sin \theta = \frac{y}{\rho}, \\ \cos(\beta X) &= -\sin \theta = -\frac{y}{\rho}, \quad \cos(\beta Y) = \cos \theta = \frac{x}{\rho} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{R}).$$

Если точка M движется не выходя изъ плоскости XY , то проекціи скорости ея на направленія α и β выразятся (по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи) такъ:

$$v \cos(v\alpha) = v \cos(vX) \cos(\alpha X) + v \cos(vY) \cos(\alpha Y),$$

$$v \cos(v\beta) = v \cos(vX) \cos(\beta X) + v \cos(vY) \cos(\beta Y).$$

Замѣнивъ здѣсь проекціи скорости на оси X и Y и косинусы угловъ (αX) , (αY) , (βX) , (βY) выраженіями, приведенными выше, получимъ:

$$v \cos(v\alpha) = \frac{x'x + y'y}{\rho}$$

$$v \cos(v\beta) = \frac{xy' - yx'}{\rho}.$$

Возьмемъ теперь производныя по t отъ обѣихъ частей уравненій (VI), получимъ:

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = xx' + yy', \quad \dots \dots \dots \quad (\text{VII})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{x^2},$$

послѣднее равенство можно представить такъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{\rho^2}, \dots \dots \dots \quad (\text{VIII})$$

потому что $x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$.

Изъ (VII) и (VIII) слѣдуетъ, что составленныя для $v \cos(v\alpha)$ и $v \cos(v\beta)$ выраженія приведутся къ слѣдующему виду;

$$\left. \begin{array}{l} v \cos(v\alpha) = \frac{d\rho}{dt} = \rho' \\ v \cos(v\beta) = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta' \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (\text{IX})$$

Такъ какъ оси α и β взаимно-ортогональны, то величина квадрата скорости выразится суммою квадратовъ ея проекцій на оси α и β :

$$v^2 = (\rho')^2 + \rho^2(\theta')^2 \dots \dots \dots \quad (\text{X})$$

Цилиндро-полярныя координаты точки M , находящейся въ плоскости XY , суть z и полярныя координаты проекціи M_{xy} точки на плоскость XY ; оси координатъ суть направлени¤ α и β проведенные изъ мѣста точки въ пространствѣ параллельно тѣмъ осямъ, которыя проведены въ плоскости XY изъ точки M_{xy} и обозначены тѣми же буквами. Третья ось, проведенная изъ точки M , параллельна положительнѣй оси Z -овъ. Проекціи скорости v на эти оси (которыя взаимно-ортогональны) выражаются такъ:

$$\left. \begin{array}{l} v \cos(v\alpha) = \frac{d\rho}{dt} = \rho' \\ v \cos(v\beta) = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta' \\ v \cos(vZ) = \frac{dz}{dt} = z' \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (\text{XI})$$

Такъ какъ оси взаимно-перпендикулярны, то величина квадрата скорости выразится такъ:

$$v^2 = (\rho')^2 + \rho^2(\theta')^2 + (z')^2 \dots \dots \dots \quad (\text{XII})$$

Отъ этой координатной системы легко перейти къ *сферическимъ координатамъ* r, φ, θ , гдѣ r есть радиусъ векторъ OM точки, а φ —уголъ составляемый имъ съ положительною осью Z -овъ. Очевидно, что

видно z равно проекції OM на ось Z -овъ, а $\rho = OM_{xy}$ есть проекція OM на плоскость XY , такъ что $z = r \cos \varphi$, $\rho = r \sin \varphi$ и поэтому:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{array} \right\} \dots \dots \quad (\text{XIII})$$

Осями координатъ служатъ три взаимно-ортогональныя направленія, проведенные изъ точки M , а именно: ось α —по продолженію радиуса вектора r , ось β —перпендикулярно къ α въ плоскости ZOM и притомъ въ такую сторону, въ какую будетъ перемѣщаться точка M , если r и θ останутся постоянными, а уголъ φ будетъ увеличиваться; наконецъ ось γ перпендикулярно къ α и β въ ту сторону, куда будетъ перемѣщаться точка M , если r и φ останутся постоянными, а уголъ θ будетъ увеличиваться.

Такъ какъ $z = r \cos \varphi$ и $\rho = \sin \varphi$, то, взявъ производныя отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ по t , получимъ:

$$z' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi',$$

$$\rho' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi';$$

отсюда, по возвышеніи въ квадратъ обѣихъ частей этихъ равенствъ и по сложеніи, найдемъ:

$$(\rho')^2 + (z')^2 = (r')^2 + r^2 (\varphi')^2.$$

Стало быть, на основаніи равенства (XII), квадратъ скорости выражится въ сферическихъ координатахъ такъ:

$$v^2 = (r')^2 + r^2 (\varphi')^2 + r^2 \sin^2 \varphi (\theta')^2 \dots \quad (\text{XIV})$$

Осъ γ сферической системы координатъ очевидно совпадаетъ съ осью β цилиндро-поллярной системы, поэтому $v \cos(v\gamma)$ по формуламъ (XI) равна $\rho\theta'$ или $r \sin \varphi \cdot \theta'$; величины же r' и $r \cdot \varphi'$ суть проекціи скорости на оси α и β сферической системы, въ чемъ нетрудно убѣдиться.

$$\left. \begin{array}{l} v \cos(v\alpha) = r' \\ v \cos(v\beta) = r\varphi' \\ v \cos(v\gamma) = r \sin \varphi \cdot \theta' \end{array} \right\} \dots \dots \quad (\text{XV}).$$

Количество движенія материальной точки и проекціи на его оси координатъ.

Количество движенія материальной точки массы m есть векторъ, имѣющій величину равную mv (гдѣ v скорость точки) и направление, совпадающее съ направленіемъ скорости. Поэтому проекціи количества движенія на оси координатъ X , Y , Z выразятся формулами:

$$\left. \begin{array}{l} mv \cos(vX) = mx' \\ mv \cos(vY) = my' \\ mv \cos(vZ) = mz' \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (\text{XVI})$$

а если точка движется въ плоскости (XY), то проекціи количества движенія на оси α и β полярной системы координатъ выражаются такъ:

$$\left. \begin{array}{l} mv \cos(v\alpha) = mr' \\ mv \cos(v\beta) = m\rho\theta' \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (\text{XVII})$$

Единицею количества движенія служить количество движенія материальной точки, масса которой равна единицѣ массы, а скорость равна единицѣ скорости, такъ что символъ единицы количества движенія есть

$$\frac{[M] \cdot [L]}{[T]}.$$

Въ системѣ основныхъ единицъ *сантиметръ-граммъ-секунда*, единица количества движенія будетъ величина:

$$\frac{[\text{граммъ}] \cdot [\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]}.$$

Ускореніе и проекціи его на оси координатъ, на направленіе скорости и на главную нормаль траекторіи.

Въ курсѣ «Основы механики», въ Кинематикѣ, на страницахъ 41 и 42 приведены выражения проекцій ускоренія точки на оси прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ. Величина ускоренія тамъ обозначена буквою u , но такъ какъ въ составленномъ руководствѣ къ курсу теоретической механики этотъ знакъ имѣть иное значеніе, то здѣсь ускореніе будетъ обозначено, какъ это уже сдѣлано въ руководствѣ, знакомъ v .

Проекціі ускоренія \dot{v} на оси прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos (\dot{v} X) &= x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \dot{v} \cos (\dot{v} Y) &= y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \dot{v} \cos (\dot{v} Z) &= z'' = \frac{d^2 z}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \dots \text{(XVIII)},$$

а потому величина ускоренія равна

$$\dot{v} = + \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \dots \text{(XIX)},$$

и косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ его съ осями координатъ выражаются отношениями:

$$\frac{x''}{\dot{v}}, \quad \frac{y''}{\dot{v}}, \quad \frac{z''}{\dot{v}}.$$

Чтобы составить выраженія проекціі ускоренія на оси полярныхъ координатъ, если движущаяся точка остается въ плоскости XY , составимъ равенства:

$$\dot{v} \cos (\dot{v} \alpha) = \dot{v} \cos (\dot{v} X) \cos (\alpha X) + \dot{v} \cos (\dot{v} Y) \cos (\alpha Y),$$

$$\dot{v} \cos (\dot{v} \beta) = \dot{v} \cos (\dot{v} X) \cos (\beta X) + \dot{v} \cos (\dot{v} Y) \cos (\beta Y),$$

или, что то же самое (см. выше формулы (XVIII) и (R)):

$$\dot{v} \cos (\dot{v} \alpha) = \frac{x'' x + y'' y}{\rho},$$

$$\dot{v} \cos (\dot{v} \beta) = \frac{xy'' - yx''}{\rho}.$$

Изъ формулъ (VII) и (VIII) мы имъемъ:

$$xx' + yy' = \rho \rho',$$

$$xy' - yx' = \rho^2 \theta'.$$

$$\frac{\rho d\rho - x x' + y y'}{dt} = \frac{d\rho}{dt} - \frac{xy' - yx'}{\rho^2}.$$

Взявъ производныя отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ по t , получимъ:

$$xx'' + yy'' + (x')^2 + (y')^2 = \rho \rho'' + (\rho')^2$$

$$xy'' - yx'' = \frac{d(\rho^2 \theta')}{dt};$$

но

$$v^2 = (x')^2 + (y')^2 = (\rho')^2 + \rho^2 (\theta')^2,$$

поэтому

$$xx'' + yy'' = \rho\rho'' + (\rho')^2 - (\rho')^2 - \rho^2 (\theta')^2,$$

а потому

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v} \alpha) &= \rho'' - \rho (\theta')^2, \\ \dot{v} \cos(\dot{v} \beta) &= \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \theta')}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (XX).$$

Если точка не остается въ плоскости XY и мы выражаемъ положеніе ея въ цилиндро-полярныхъ координатахъ, то проекціи ускоренія на оси α , β , Z выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v} \alpha) &= \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \dot{v} \cos(\dot{v} \beta) &= \frac{1}{\rho} \frac{d \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right)}{dt} \\ \dot{v} \cos(\dot{v} \gamma) &= \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (XXI)$$

На стр. 33—37 кинематической части «Основъ механики» выведены выраженія проекцій ускоренія на направлениe скорости и на направлениe главной нормали (къ центру кривизны) и доказано, что полное ускореніе всегда заключается въ плоскости кривизны. Означая черезъ ρ величину радиуса кривизны и направлениe главной нормали, черезъ k кривизну кривой и черезъ b направлениe бинормали или второй нормали, можемъ написать слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v} v) &= \frac{dv}{dt} \\ \dot{v} \cos(\dot{v} \rho) &= \frac{v^2}{\rho} = kv^2 \\ \dot{v} \cos(\dot{v} b) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \quad (XXII)$$

На стр. 21 (Основы, кинематика) сказано о единицѣ ускоренія.