О ФУНКЦІЯХЪ
МАЛО УДАЛЯЮЩИХСЯ ОТЪ НУЛЯ
ПРИ НѢКОТОРЫХЪ ВЕЛИЧИНАХЪ ПЕРЕМѢННОЙ.

П. ЧЕБЫШЕВА.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія Императорской Академіи Наукъ 23 декабря 1880 года.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ XL-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ
№ 3.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ. 1881.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ:

И. Глазунова, въ С. П. Б. **Эггерса и Комп.,** въ С. П. Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 15 коп.

О ФУНКЦІЯХЪ

МАЛО УДАЛЯЮЩИХСЯ ОТЪ НУЛЯ

ПРИ НѢКОТОРЫХЪ ВЕЛИЧИНАХЪ ПЕРЕМѢННОЙ.

П. ЧЕБЫШЕВА.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія Императорской Академіи Наукъ 23 декабря 1880 года.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ XL-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ.
№ 3.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ. 1881.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

И. Глазунова, въ С. П. Б. **Эггерса и Комп.**, въ С. П. Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 15 коп.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Санктпетербургъ. Май 1881 г.
Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій*.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин., № 12.)

О ФУНКЦІЯХЪ МАЛО УДАЛЯЮЩИХСЯ ОТЪ НУЛЯ ПРИ НѢКОТОРЫХЪ ВЕЛИЧИНАХЪ ПЕРЕМѢННОЙ.

§ 1. Если цѣлая функція $F(x)$ между предѣлами $x=-h$, $x=+h$ мало удаляется отъ нуля, за этими предѣлами она можетъ имѣть большую величину при x близкомъ къ $-h$ или $+h$ только въ томъ случаѣ, когда степень ея довольно высока. Мы теперь покажемъ какъ, по степени функціи $F(x)$ и высшему предѣлу уклоненія ея отъ нуля между $x=-h$, $x=+h$, можно найти высшій предѣлъ ея величины при какомъ нибудь значеніи $x=H$, не заключающемся между $x=-h$, $x=+h$. Такъ какъ введеніемъ постояннаго множителя въ функцію $F(x)$ можно въ желаемой пропорціи измѣнить всѣ значенія ея и между $x=-h$, $x=+h$, и при $x=H$, мы для простоты изложенія ограничимся предположеніемъ, что функція $F(x)$ такова, что значеніе ея при $x=H$ равняется нѣкоторой данной величинѣ M, и затѣмъ между цѣлыми функціями, удовлетворяющими условію

$$F(H)=M$$

и имѣющими данную степень n, будемъ искать ту, которая между $x=-h$, $x=+h$ наименѣе удаляется отъ нуля. Изображая черезъ L наибольшее уклоненіе отъ нуля такой функціи между $x=-h$, $x=+h$, и замѣчая, что для всякой другой функціи той-же степени n и приводящейся къ M при $x = H$, наибольшее уклоненіе отъ 0 между $x = -h$, $x = +h$ будетъ превосходить L, мы заключаемъ, что отношеніе

$$\frac{M}{L},$$

получаемое изъ разсмотрѣнія этой функціи, будетъ представлять высшій предѣлъ отношенія значенія цѣлой функціи степени n при $x = H$ къ наибольшему уклоненію ея отъ нуля между $x = -h$, $x = +h$.

§ 2. Приступая къ опредѣленію функціи $F(x)$ подъ вышесказанными условіями, мы замѣчаемъ, что она, будучи степени n и приводясь къ M при $x = H$, должна представляться такою формулою:

$$(1)\ \ldots F(x) = (p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n)(x - H) + M,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ постоянныя количества. Эти постоянныя въ разсматриваемой нами функціи опредѣляются тѣмъ условіемъ, что она отъ $x = -h$ до $x = +h$ остается въ предѣлахъ $-L$, $+L$, между которыми ни одна функція того-же вида и при тѣхъ-же величинахъ x не можетъ оставаться. Для опредѣленія значенія постоянныхъ $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ на основаніи этого условія мы воспользуемся первою *теоремою* Мемуара нашего, подъ заглавіемъ: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* *). Теорема эта можетъ быть приминима къ опредѣленію коеффиціентовъ функціи $F(x)$, такъ какъ эта функція и ея производныя остаются непрерывными и конечными между $x = -h$ и $x = +h$.

На основаніи этой теоремы и изображая черезъ

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

различныя величины перемѣнной x, при которыхъ функція $F(x)$

---

*) Mémoires de l'Académie Imperiale des Sciences de S.-Pétersbourg. Sixième Série. Sciences mathématiques et physiques. Tome VII.

между $x = -h$, $x = +h$ достигаетъ предѣльныхъ величинъ $-L$, $+L$, мы заключаемъ, что система n уравненій

$$\frac{dF(x_1)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\lambda_\mu = 0,$$

$$\frac{dF(x_1)}{dp_2}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\lambda_\mu = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dF(x_1)}{dp_n}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\lambda_\mu = 0$$

съ μ неизвѣстными

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$$

должна имѣть рѣшеніе, въ которомъ всѣ μ неизвѣстныхъ λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ не равны нулю.

Опредѣляя по (1) значеніе производныхъ

$$\frac{dF(x_1)}{dp_1}, \frac{dF(x_2)}{dp_1}, \ldots \frac{dF(x_\mu)}{dp_1},$$

$$\frac{dF(x_1)}{dp_2}, \frac{dF(x_2)}{dp_2}, \ldots \frac{dF(x_\mu)}{dp_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dF(x_1)}{dp_n}, \frac{dF(x_2)}{dp_n}, \ldots \frac{dF(x_\mu)}{dp_n},$$

и внося ихъ величину въ предыдущія уравненія, мы находимъ, что они приводятся къ слѣдующему: