ОБЪ ОТНОШЕНІИ

ДВУХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ,

РАСПРОСТРАНЕННЫХЪ НА ОДНѢ И ТѢ ЖЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕМѢННОЙ.

П. ЧЕБЫШЕВА.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія Императорской Академіи Наукъ 23 декабря 1882 года.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ XLIV-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ.
№ 2.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1883.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

И. Глазунова, въ С.П.Б. Эггерса и Комп., въ С.П.Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 15 коп.

ОБЪ ОТНОШЕНІИ

ДВУХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ,

РАСПРОСТРАНЕННЫХЪ НА ОДНѢ И ТѢ ЖЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕМѢННОЙ.

П. ЧЕБЫШЕВА.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленіи Императорской Академіи Наукъ 23 декабря 1882 года.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ XLIV-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ. № 2.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1883.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

И. Глазунова, въ С.П.Б. Эггерса и Комп., въ С.П.Б.

Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 15 коп.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
С.-Петербургъ, Февраль, 1883 года.
Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій.*

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин., № 12.)

ОБЪ ОТНОШЕНІИ ДВУХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ, РАСПРОСТРАНЕННЫХЪ НА ОДНѢ И ТѢ-ЖЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕМѢННОЙ.

§ 1. Отношеніе двухъ интеграловъ

$$\frac{\int Yudx}{\int Yvdx},$$

распространенныхъ на однѣ и тѣ-же величины x и заключающихъ подъ знаками своими дифференціалы съ одинакимъ множителемъ Y, мѣняется болѣе или менѣе при измѣненіи этого множителя.

Мы теперь покажемъ какъ найдутся предѣлы, ограничивающіе эти измѣненія, когда общій множитель Y остается полиномомъ степени не выше n. При этомъ мы будемъ предполагать, что полиномъ Y и функція v сохраняютъ однѣ и тѣ-же знаки въ предѣлахъ интегрированія, условіе необходимое для того, чтобы отношеніе

$$\frac{\int Yudx}{\int Yvdx}$$

не принимало всѣхъ величинъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для упрощенія нашихъ формулъ, мы будемъ предполагать, что интегралы

$$\int Yudx, \qquad \int Yvdx$$

приведены къ такому виду, что предѣлы ихъ суть $x = -1$, $x = +1$, и что знакъ, сохраняемый по положенію перемѣннымъ полиномомъ Y и функціею v въ предѣлахъ интегрированія, есть $+$.

§ 2. Приступая къ опредѣленію въ сдѣланныхъ нами предположеніяхъ предѣльныхъ величинъ отношенія

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yudx}{\int_{-1}^{+1} Yvdx},$$

мы теперь докажемъ, что наибольшая и наименьшая величины этого отношенія получаются при величинахъ полинома Y, удовлетворяющихъ такому уравненію:

$$Y = (1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0} Z^2,$$

гдѣ $\rho = 0$ или 1; $\rho_0 = 0$ или 1, а Z есть полиномъ нѣкоторой степени.

Для доказательства этого пусть будетъ

$$Y = Y_0$$

та величина полинома Y, при которой, въ сдѣланныхъ нами предположеніяхъ, отношеніе

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yudx}{\int_{-1}^{+1} Yvdx}$$

достигаетъ высшаго или нисшаго предѣла. Такъ какъ полиномъ Y_0 не долженъ мѣнять своего знака между $x = -1$ и $x = +1$, всѣ корни уравненія

$$Y_0 = 0$$

превосходящіе -1 и меньшіе $+1$ должны быть кратными и степени кратности ихъ должны равняться числамъ четнымъ. Полагая, что такіе корни суть

$$x_1, x_2, \dots x_i,$$

что степени ихъ кратности равны

$$2\mu_1, 2\mu_2, \dots 2\mu_i$$

и что

$$\nu, \nu_0$$

суть числа корней уравненія

$$Y_0 = 0$$

равныхъ

$$-1, +1,$$

мы замѣчаемъ, что произведеніе

$$(x-x_1)^{2\mu_1}(x-x_2)^{2\mu_2}\dots(x-x_i)^{2\mu_i}(1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0}$$

представляетъ полиномъ степени не выше чѣмъ Y_0, что этотъ полиномъ подобно Y_0 сохраняетъ знакъ $+$ между $x=-1$ и $x=+1$, и что отношеніе его къ Y_0 между $x=-1$ и $x=+1$ остается величиною конечною.

Вслѣдствіе этого при U, опредѣляемомъ равенствомъ

$$(1)\dots U=(x-x_1)^{2\mu_1}(x-x_2)^{2\mu_2}\dots(x-x_i)^{2\mu_i}(1+x)^{v}(1-x)^{v_0},$$

и α безконечно маломъ, выраженіе

$$Y_0 \pm \alpha U$$

будетъ представлять полиномъ одинаковой степени съ Y_0 и также какъ Y_0 сохраняющій знакъ $+$ между $x=-1$ и $x=-1$. А потому величина отношенія

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yudx}{\int_{-1}^{+1} Yvdx}$$

при

$$Y = Y_0$$

не можетъ быть ни наибольшею, ни наименьшею величиною въ сдѣланныхъ нами предположеніяхъ, если отношеніе

$$\frac{\int_{-1}^{+1} (Y_0 \pm \alpha U) u dx}{\int_{-1}^{+1} (Y_0 \pm \alpha U) v dx}$$

съ однимъ изъ двухъ знаковъ $\pm$ при α превосходитъ

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Y_0 u dx}{\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx}$$

а съ другимъ меньше этой величины. Для того же, чтобы это не могло имѣть мѣста при α безконечно маломъ, какъ извѣстно, производная по α выраженія

$$\frac{\int_{-1}^{+1} (Y_0 \pm \alpha U) u dx}{\int_{-1}^{+1} (Y_0 \pm \alpha U) v dx}$$

при $\alpha = 0$ должна равняться нулю, что даетъ намъ такое уравненіе:

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx \,.\, \int_{-1}^{+1} U u dx - \int_{-1}^{+1} Y_0 u dx \cdot \int_{-1}^{+1} U v dx}{\left[\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx\right]^2} = 0.$$

Такъ какъ полиномы Y_0, U и функція v, между $x = -1$ и $x = +1$, по вышесказанному, остаются положительными, интегралы