Эйлер Л.

Оснований алгебры...

Ч1. Т2.

ОСНОВАНІЙ АЛГЕБРЫ

ЛЕОНГАРДА ЕЙЛЕРА

ЧАСТИ ПЕРВОЙ

ПЕРВЫЯ ТРИ ОТДѢЛЕНІЯ,

переведенныя съ Французскаго языка на Россійской, со многими присовокупленіями,

ВАСИЛІЕМЪ ВИСКОВАТОВЫМЪ,

Академіи Наукъ Екстраординарнымъ Академикомъ.

ТОМЪ IIй,

содержащій въ себѣ

ОТДѢЛЕНІЕ IIIе.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ

при Императорской Академіи Наукъ,

1812 года.

Печатано отъ Императорской Академіи Наукъ.

Николай Фуссъ,
Непремѣнный Секретарь.

ОСНОВАНІИ АЛГЕБРЫ

ПЕРВОЙ ЧАСТИ

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ

ОБЪ ОТНОШЕНІЯХЪ И ПРОПОРЦІЯХЪ

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ.

Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ.

ГЛАВА I.

Объ отношеніи ариѳметическомъ, или о разности двухъ чиселъ.

378.

Двѣ величины быть могутъ или равны, или не равны между собою. Въ послѣднемъ случаѣ, то есть когда одна изъ величинъ больше другой, неравенство оныхъ разсматривать можно подъ двумя различными видами; а именно: можно вопрошать, *на сколько* одна величина больше другой; или можно вопрошать *во сколько кратъ* одна величина больше другой. Слѣдствія, разрѣшающія сіи два вопроса называются *отношеніями*; и притомъ первое обыкновенно называется *отношеніе ариѳметическое*, а второе *отношеніе геометрическое*: сіи наименованія приняты произвольно, и съ самымъ свойствомъ предмета никакой связи не имѣютъ.

379.

Всякой удобно представить себѣ можетъ, что величины, о коихъ мы говоримъ, должны быть того же рода, потому что въ противномъ случаѣ ни о равенствѣ, ни о неравенствѣ оныхъ ничего сказать не можно. Напримѣръ, нелѣпо бы было вопрошать, что два фунта и три аршина суть равныя ли, или не равныя количества. И для сей причины во всемъ нижеслѣдующемъ слово настоять будетъ токмо о количествахъ одного и того же рода; и какъ оныя всегда изображены быть могутъ въ числахъ (56), то, такъ какъ мы уже въ самомъ началѣ сказали, мы говорить будемъ токмо о числахъ.

380.

И такъ когда вопрошается на сколько одно изъ двухъ данныхъ чиселъ больше дру-

(56) Изключая количества не соизмѣримыя, какъ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, и проч., кои числами только по приближенію изображены быть могутъ.

гаго, то разрѣшеніе сего вопроса опредѣляетъ ариѳметическое отношеніе сихъ двухъ чиселъ. Но какъ сіе разрѣшеніе состоитъ въ назначеніи разности сихъ двухъ чиселъ, то слѣдуетъ изъ сего, что отношеніе ариѳметическое не иное что есть, какъ разность двухъ чиселъ. И какъ сіе слово *разность*, кажется намъ, есть приличнѣйшее выраженіе, нежели отношеніе ариѳметическое, то мы подъ словомъ *отношеніе* всегда разумѣть будемъ отношеніе геометрическое.

381.

Разность двухъ чиселъ, какъ извѣстно, опредѣлится вычитаніемъ меньшаго числа изъ большаго; и потому ничего нѣтъ легче, какъ разрѣшить вопросъ, на сколько одно число больше другаго. И такъ, когда въ случаѣ количествъ равныхъ, гдѣ разность ихъ ничто или нуль, вопрошается на сколько одно число больше другаго, то надлежитъ отвѣчать, ни на сколько. Напримѣръ поелику $6 = 2 \cdot 3$, то разность между 6 и $2 \cdot 3$ будетъ 0.

382.

Но когда два числа не равны между собою, какъ 5 и 3, и вопрошается на сколько 5 больше 3, то должно отвѣчать на 2, каковое число опредѣляется вычитаніемъ 3 изъ 5. Такъ же 15 больше 5 на 10, и 20 превосходитъ 8 числомъ 12.

383.

И такъ здѣсь предстоятъ разсматриванію нашему три вещи: 1) большее изъ двухъ чиселъ; 2) меньшее изъ двухъ чиселъ и 3) разность сихъ двухъ чиселъ. И сіи три количества такое имѣютъ между собою сопряженіе, что когда даны будутъ два изъ нихъ, то третіе всегда опредѣлить можно.

Пусть большее число $= a$, меньшее $= b$, разность $= d$: сія разность найдется, отнимая b отъ a, такъ что $d = a - b$. Откуда явствуетъ, какимъ образомъ, по даннымъ a и b опредѣлить d.

384.

Но когда дана разность и меньшее число или b, то можно опредѣлить большее число; и именно надлежитъ меньшее число сложить съ разностію; что даетъ $a = b + d$. Ибо когда изъ $b + d$ отнимется меньшее число b, то останется d, которое есть извѣстная разность. Пусть меньшее число $= 12$, разность $= 8$, будетЪ большее число $= 20$.

385.

НаконецЪ естьли дана разность d и большее число a, то другое число b найдется, отнимая разность отЪ большаго числа, что даетЪ $b = a - d$. Ибо когда отнимемЪ $a - d$ отЪ большаго числа a, то останется d, что есть данная разность.

386.

И такЪ между сими тремя числами a, b, d имѣется такое сопряженіе, что изЪ онаго опредѣляются три слѣдующія равенства 1) $d = a - b$; 2) $a = b + d$; 3) $b = a - d$; и естьли одно изЪ сихЪ сравненій справедливо, то по необходимости и два остальныя такЪ же справедливы быть долженствуютЪ. Слѣдовательно вообще, когда $z = x + y$, то по необходимости должно быть $y = z - x$ и $x = z - y$.

387.

ВЪ разсужденіи сихЪ ариѳметическихЪ отношеній надлежитЪ примѣтить, что когда кЪ двумЪ числамЪ a и b приложится, по произволенію взятое число c, или отЪ оныхЪ отнимется сіе число c, то разность между произшедшими суммами или остатками будетъ та же самая d, то есть, что когда d есть разность между a и b, то самое же сіе число d будетъ такъ же разность и между $a+c$ и $a+c$, или между $a-c$ и $b-c$. Напримѣръ, разность чиселъ 20 и 12 есть 8; и оная останется та же самая, какое бы число къ симъ двумъ числамъ 20 и 12 приложено ни было, или какое бы число изъ оныхъ вычтено ни было.

388.

Доказательство сему очевидно; ибо когда $a-b=d$, то будетъ такъ же и $(a+c)-(b+c)=d$, и $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Когда числа a и b возмутся двукратно, то и разность сдѣлается такъ же въ два раза больше. Такъ, когда $a-b=d$, то будетъ $2a-2b=2d$, и вообще $na-nb=nd$, какое бы число вмѣсто n взято ни было.

ГЛАВА II.

О пропорціяхъ ариѳметическихъ.

390.

Когда два ариѳметическія отношенія равны между собою, то равенство сіе называется *пропорція ариѳметическая.*

И такъ когда $a - b = d$ и $p - q = d$, такъ что разность чиселъ a и b есть та же самая, что и чиселъ p и q, то говорится, что сіи четыре числа находятся въ пропорціи ариѳметической: оная пишется такъ: $a - b = p - q$, каковое выраженіе ясно представляетъ, что разность между a и b равна разности между p и q.

391.

И такъ пропорція ариѳметическая состоитъ изъ четырехъ членовъ, кои должны быть таковы, что когда второе вычтется изъ перваго, а четвертое изъ третьяго, то разности были бы равныя. Посему слѣдующія четыре числа 12, 7, 9, 4 составляютъ пропорцію ариѳметическую, потому что $12-7 = 9-4$.

392.

Въ пропорціи ариѳметической, какъ $a-b = p-q$, можно перемѣнить мѣсто втораго и третьяго членовъ, то есть можно написать $a-p = b-q$, и равенство сіе не менѣе того будетъ справедливо Ибо, поелику $a-b = p-q$, то приложивъ къ обѣимъ частямъ b, получимъ $a = b+p-q$; вычтемъ теперь изъ обѣихъ частей p, будетъ $a-p = b-q$.

И такъ, поелику $12-7 = 9-4$, то будетъ такъ же $12-9 = 7-4$.

393.

Равнымъ образомъ во всякой пропорціи ариѳметической поставить можно второй членъ вмѣсто перваго, перемѣнивъ въ то же время подобнымъ образомъ третей и четвертой члены; то есть, что когда $a-b = p-q$, то будетъ такъ же $b-a = q-p$. Ибо $b-a$ равно $a-b$ взятому отрицательно; и такъ же $q-p$ равно $p-q$ взятому отрицательно. Посему, поелику $12-7 = 9-4$, то такъ же будетъ $7-12 = 4-9$.

394.

Главнѣйшее свойство всякой пропорціи ариѳметической есть слѣдующее: сумма втораго и третьяго членовъ равна суммѣ перваго и четвертаго членовъ. Свойство сіе, которое весьма замѣтить должно, выражается такъ же слѣдующимъ образомъ: сумма *среднихъ* членовъ равна суммѣ *крайнихъ* членовъ. И такъ поелику $12-7=9-4$, будетъ $7+9=12+4$; и дѣйствительно та и другая сумма равна 16.

395.

Для доказательства сего главнаго свойства, пусть $a-b=p-q$; когда къ обѣимъ частямъ приложимъ $b+q$, то будетъ $a+q=b+p$, то есть сумма перваго и четвертаго членовъ равна суммѣ втораго и третьяго членовъ.

И обратно, естьли четыре числа a, b, p, q суть такого свойства, что сумма втораго и третьяго членовъ равна суммѣ перваго и четвертаго, то есть когда $b+p=a+q$, то сіи числа составятъ пропорцію ариѳметическую; то есть, будетъ $a-b=p-q$. Въ самомъ дѣлѣ, поелику $a+q=b+p$, что когда отъ обѣихъ частей отнимемъ $b+q$, мы получимъ $a-b=p-q$.

И такъ, поелику числа 18, 13, 15, 10 суть таковы, что сумма среднихъ членовъ $13+15=28$ равна суммѣ крайнихъ членовъ $18+10=28$, то можемъ безъ всякаго сомнѣнія заключить, что оныя составляютъ также пропорцію ариѳметическую, и что слѣдственно $18-13=15-10$.

396.

Помощію сего свойства, о которомъ мы говоримъ, удобно разрѣшить слѣдующій вопросъ: по даннымъ тремъ первымъ членамъ пропорціи ариѳметической, сыскать четвертый?

Пусть будутъ a, b, p сіи три первые члены, и означимъ чрезъ q четвертый членъ, который опредѣлить надлежитъ. Мы будемъ имѣть $a+q=b+p$; вычтемъ теперь съ той и другой стороны a, получимъ $q=b+p-a$. И такъ четвертый членъ найдется, когда второй и третій вмѣстѣ сложатся и изъ суммы вычтется первый членъ. Положимъ, напримѣръ, что данные три первые члены суть, 19, 28 и 13 : сумма втораго и третьяго = 41; изъ которой вычитая первой членъ 19, получимъ 22 для искомаго четвертаго члена, и ариөметическая пропорція изобразится чрезъ 19 — 28 = 13 — 22, или чрезъ 28 — 19 = 22 — 13, или еще чрезъ 28 — 22 = 19 — 13.

397.

Ежели въ пропорціи ариөметической второй членъ равенъ третьему, то выдутъ только три числа; но свойство оныхъ будетъ таково, что первый членъ безъ втораго равенъ второму безъ третьяго, или, что все то же, разность между первымъ и вторымъ членами равна разности между вторымъ и третьимъ. Таковаго свойства суть числа 19, 15, 11; потому что 19 — 15 = 15 — 11.

398.

Числа, каковы суть предъидущія, называются числами составляющими непрерывную ариөметическую пропорцію; таковая пропорція означается иногда знакомъ ÷, такъ что пишется ÷ 19. 15. 11. Сего рода пропорціи называются такъ же *прогрессіями*