ИМПЕРАТОРСКІЙ С.-Петербургскій университетъ.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ АНАЛИЗЪ
И
СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ,

ЛЕКЦІИ

профессора А. А. Маркова.

Изданіе студента В. П. Звонарева.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-Литографія А. Ф. Маркова, Невскій пр., домъ № 34.
1894.

Введеніе въ Анализъ.

Начала ученія объ „опредѣлителяхъ".

Прежде введенія въ курсъ понятія объ опредѣлителѣ, припомнимъ рѣшеніе системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными:

$$a_1x+b_1y=c_1\ ,$$
$$a_2x+b_2y=c_2\ ,$$

гдѣ a, b, c — числа извѣстныя.

Неизвѣстныя x и y выражаются дробями:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ ;\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ ,$$

За Профессора Вл. Жонарев

у которыхъ знаменатель — одинъ и тотъ же двучленъ

$$a_1b_2 - a_2b_1 ,$$

а числители различны.

Чтобы получить числитель для x, нужно въ выраженіи общаго знаменателя

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

коэффиціенты при неизвѣстномъ x замѣнить соотвѣтствующими свободными членами, т. е. букву a на c; найдемъ:

$$c_1b_2 - c_2b_1 .$$

Числитель для y получится послѣ замѣны b на c.

Подобныя же формулы имѣемъ для рѣшенія системы трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (\omega),$$

гдѣ a, b, c, d означаютъ числа данныя.

Неизвѣстныя x, y, z также выражаются дробями:

$$x = \frac{X}{S} \;;\quad y = \frac{Y}{S} \;;\quad z = \frac{Z}{S} ,$$

у которыхъ знаменателемъ служитъ одинъ и тотъ-же шестичленъ S, составленный по коэффи-

Лит. А. Маркова, Невскій, 34.

ціентамъ при неизвѣстныхъ, числители же-различные.

Всѣ члены знаменателя S можно получить изъ одного $a_1 b_2 c_3$ при помощи всевозможныхъ перемѣщеній значковъ 1, 2, 3.

Очевидно, что изъ нумеровъ 1, 2, 3 можно сдѣлать только шесть слѣдующихъ размѣщеній:

1, 2, 3 ; 1, 3, 2 ; 2, 3, 1 ; 2, 1, 3 ; 3, 1, 2 ; 3, 2, 1.

Здѣсь каждое размѣщеніе получено изъ предыдущаго переставливаніемъ двухъ нумеровъ. Переставливая въ произведеніи:

$$a_1 b_2 c_3$$

значки 1, 2, 3 (соотвѣтственно написаннымъ шести размѣщеніямъ), получимъ еще пять одночленовъ.

И всѣ шесть членовъ

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$a_1 b_2 c_3$,	$a_1 b_3 c_2$,	$a_2 b_3 c_1$,	$a_2 b_1 c_3$,	$a_3 b_1 c_2$,	$a_3 b_2 c_1$

войдутъ въ составъ знаменателя S, стоящіе __на нечетныхъ__ мѣстахъ со знакомъ __плюсъ__; на четныхъ — (2)$^{\text{мъ}}$, (4)$^{\text{мъ}}$, (6)$^{\text{мъ}}$ съ минусомъ):

$$S = \left\{ \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \\ + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + \\ + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{array} \right\}.$$

Для вывода выше упомянутыхъ выраженій x, y, z, перепишемъ S иначе, собравъ по два члены, содержащіе a съ однимъ и тѣмъ же значкомъ:

$$S = a_1\underline{(b_2c_3-b_3c_2)} + a_2\underline{\underline{(b_3c_1-b_1c_3)}} + a_3\underline{\underline{\underline{(b_1c_2-b_2c_1)}}}.$$

Затѣмъ умножаемъ:

всѣ члены 1^{го} уравненія на двучленъ $\underline{(b_2c_3-b_3c_2)}$.

" " 2^{го} " " " $\underline{\underline{(b_3c_1-b_1c_3)}}$,

" " 3^{го} " " " $\underline{\underline{\underline{(b_1c_2-b_2c_1)}}}$

и получаемъ:

$$\begin{cases} a_1(b_2c_3-b_3c_2)x+b_1(b_2c_3-b_3c_2)y+c_1(b_2c_3-b_3c_2)z=d_1(b_2c_3-b_3c_2), \\ a_2(b_3c_1-b_1c_3)x+b_2(b_3c_1-b_1c_3)y+c_2(b_3c_1-b_1c_3)z=d_2(b_3c_1-b_1c_3), \\ a_3(b_1c_2-b_2c_1)x+b_3(b_1c_2-b_2c_1)y+c_3(b_1c_2-b_2c_1)z=d_3(b_1c_2-b_2c_1). \end{cases}$$

Приравнивая, наконецъ, сумму правыхъ частей найденныхъ уравненій суммѣ ихъ лѣвыхъ частей, имѣемъ:

$$\begin{bmatrix} a_1(b_2c_3-b_3c_2)+ \\ +a_2(b_3c_1-b_1c_3)+ \\ +a_3(b_1c_2-b_2c_1) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1(b_2c_3-b_3c_2)+ \\ +b_2(b_3c_1-b_1c_3)+ \\ +b_3(b_1c_2-b_2c_1) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1(b_2c_3-b_3c_2)+ \\ +c_2(b_3c_1-b_1c_3)+ \\ +c_3(b_1c_2-b_2c_1) \end{bmatrix} z =$$

$$= d_1(b_2c_3-b_3c_2) + d_2(b_3c_1-b_1c_3) + d_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

Коэффиціенты при y и z, какъ равные нулю, пропадутъ.

Дѣйствительно, раскрывая скобки, напримѣръ, въ коэффиціентѣ при y, мы убѣдимся, что каждому члену съ плюсомъ найдется тождественный съ минусомъ:

$$\underline{\underline{b_1b_2c_3}}-\overparen{b_1b_3c_2}+\underline{b_2b_3c_1}-\underline{\underline{b_2b_1c_3}}+\overparen{b_3b_1c_2}-\underline{b_3b_2c_1}.$$

Слѣдовательно, останется уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x:

$$x\left[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\right]=$$
$$=d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

Откуда:

$$x=\frac{X}{S}=\frac{d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$y=\frac{Y}{S}=\frac{a_1d_2c_3-a_1d_3c_2+a_2d_3c_1-a_2d_1c_3+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1};$$

$$z=\frac{Z}{S}=\frac{a_1b_2d_3-a_1b_3d_2+a_2b_3d_1-a_2b_1d_3+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}.$$

Мы видимъ, что числители выраженій: x, y, z можно получить изъ общаго знаменателя S черезъ замѣну a, b, c на d.

Чтобы вывести подобныя-же формулы для рѣшенія системы n уравненій первой степени съ n неизвѣстными, остановимся на разсмотрѣніи выраженій, называемыхъ опредѣлителями.

Объ „опредѣлителяхъ".

Въ рѣшеніи обѣихъ предыдущихъ системъ уравненій знаменатели

$$a_1b_2-a_2b_1$$

и

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

суть <u>опредѣлители:</u>

первый четырехъ элементовъ

$$\begin{matrix} a_1\,, & b_1\,, \\ a_2\,, & b_2\,, \end{matrix}$$

расположенныхъ въ двѣ строки и въ два столбца; второй девяти элементовъ

$$\begin{matrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1\,, \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2\,, \\ a_3\,, & b_3\,, & c_3\,, \end{matrix}$$

расположенныхъ въ три строки и въ три столбца.

Элементы, идущіе горизонтально, напримѣръ:

$$a_1\,,\ b_1\,,\ c_1$$

или:

$$a_3\,,\ b_3\,,\ c_3\,,$$

составляютъ <u>строки</u>;

элементы, идущіе вертикально, какъ:

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3$$

или:

$$c_1\,,\ c_2\,,\ c_3\,,$$

составляютъ <u>столбцы</u>.

Условимся, для обозначенія этихъ опредѣлителей, ставить ихъ элементы между двумя вертикальными чертами и писать:

$$\begin{vmatrix} a_1\,, & b_1 \\ a_2\,, & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1\,.$$

Установимъ теперь общее понятіе объ опредѣлителѣ..

Пусть данные элементы расположены въ n строкъ и n столбцовъ:

	1ый столбецъ		2ой столбецъ		3ій столбецъ			nый столбецъ
1ая строка	a_1	,	b_1	,	c_1	,	..............,	p_1
2ая „	a_2	,	b_2	,	c_2	,	..............,	p_2
3я „	a_3	,	b_3	,	c_3	,	..............,	p_3
	....		....		....		....	....
	....		....		....		....	....
nая строка	a_n	,	b_n	,	c_n	,	..............,	p_n

Всѣ столбцы различаются буквами

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots,\ p\ ;$$

всѣ строки обозначены различными нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n..$$

Надо помнить, что въ разсматриваемой нами системѣ <u>n число строкъ = n числу столбцовъ..</u>

Опредѣлитель этой системы n^2 элементовъ, для обозначенія котораго мы ставимъ наши элементы между двумя вертикальными чертами, представляетъ алгебраическую сумму всевозможныхъ произведеній такого вида:

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots\ldots p_\omega\ ,$$

гдѣ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ldots,\ \omega$$

-какое-нибудь размѣщеніе нумеровъ

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n.$$

Всѣ такія произведенія будемъ называть <u>членами</u> опредѣлителя. Для составленія каждаго члена опредѣлителя нужно взять изъ каждаго столбца по одному элементу, — и такъ взять, чтобы элементы находились въ разныхъ строкахъ. Слѣдовательно, въ каждый членъ опредѣлителя всякій нумеръ

$$1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$$

и всякая буква

$$a, b, c, \ldots\ldots, p$$

входятъ одинъ и <u>только одинъ</u> разъ.

<u>Число членовъ</u> въ опредѣлителѣ системы n^2 элементовъ равно числу размѣщеній изъ n нумеровъ, то-есть

$$\text{равно } 1.2.3.\ldots\ldots.n.$$

Напримѣръ, опредѣлитель системы 4-хъ элементовъ

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

состоитъ изъ двухъ членовъ, такъ какъ $n=2$.

Въ опредѣлителѣ системы 9 элементовъ

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

шесть членовъ.

Число членовъ въ опредѣлителѣ системы $16^{ти}$ элементовъ равно $1.2.3.4=24$ (такъ какъ $n=4$), и т. д..

Одни члены входятъ въ составъ опредѣлителя со знакомъ плюсъ, а другіе — со знакомъ минусъ..

Какіе члены берутся со знакомъ + и какіе со знакомъ —, объ этомъ мы сейчасъ будемъ говорить.. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы раздѣлимъ размѣщенія на два класса и укажемъ правило, по которому для каждаго размѣщенія можно узнать, къ какому классу оно относится..

Вмѣстѣ съ общимъ случаемъ будемъ разсматривать и частный..

Возьмемъ опредѣлитель 36 элементовъ:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, & f_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & f_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3, & f_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4, & f_4 \\ a_5, & b_5, & c_5, & d_5, & e_5, & f_5 \\ a_6; & b_6, & c_6, & d_6, & e_6, & f_6 \end{vmatrix}$$

Въ этомъ опредѣлителѣ число членовъ равно $1.2.3.4.5.6=720$ (такъ какъ $n=6$)..

Возьмемъ одинъ какой-нибудь членъ, напримѣръ:

$$a_3 b_5 c_1 d_6 e_2 f_4 \ldots$$

Чтобы опредѣлить знакъ, съ которымъ этотъ членъ войдетъ въ составъ опредѣлителя, разсмотримъ соотвѣтствующее ему размѣщеніе нумеровъ

$$3,\ 5,\ 1,\ 6,\ 2,\ 4$$

и узнаемъ, къ какому классу принадлежитъ это размѣщеніе, по слѣдующему правилу.

Нужно изъ шести нумеровъ составить всевозможныя пары. Число всѣхъ паръ $= \frac{6.5}{2} = 15$.

$$\begin{array}{lllll}
1,2 & & & & \\
\underline{1,3} & \underline{2,3} & & & \\
1,4 & 2,4 & 3,4 & & \\
\underline{1,5} & \underline{2,5} & 3,5 & \underline{4,5} & \\
1,6 & \underline{2,6} & 3,6 & \underline{4,6} & 5,6.
\end{array}$$

Въ общемъ случаѣ эти пары будутъ:

$$\begin{array}{llllll}
1,2 & & & & & \\
1,3 & 2,3 & & & & \\
1,4 & 2,4 & 3,4 & & & \\
1,5 & 2,5 & 3,5 \ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots & & & & & \\
\ldots\ldots & & & (n-2),(n-1) & & \\
1,n & 2,n & 3,n \ldots\ldots & (n-2),n & (n-1),n &
\end{array}$$

и число ихъ равно:

$$\frac{n(n-1)}{2}\,..$$

Разсмотримъ послѣдовательно пары и будемъ говорить, что какая-нибудь пара (напримѣръ, 1 съ 3) представляетъ въ нашемъ размѣщеніи <u>безпорядокъ</u>, если бо́льшій нумеръ предшествуетъ ме́ньшему (у насъ 3 предшествуетъ единицѣ).

Въ нашемъ примѣрѣ пары, представляющія безпорядокъ, таковы:

(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6).

Пары-же

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6)

представляютъ въ размѣщеніи

3, 5, 1, 6, 2, 4

порядокъ, такъ какъ меньшій ихъ нумеръ предшествуетъ большему.

Сосчитаемъ теперь число безпорядковъ. Въ данномъ размѣщеніи нечетное число безпорядковъ и равно 7.

Условимся-же называть размѣщеніемъ I-го класса такое, въ которомъ число безпорядковъ четное; размѣщеніемъ-же II-го класса такое, гдѣ число безпорядковъ нечетное. И будемъ брать со знакомъ плюсъ тѣ члены, которымъ соотвѣтствуетъ размѣщеніе перваго класса, и со знакомъ минусъ тѣ, которымъ соотвѣтствуетъ размѣщеніе второго класса.

Согласно установленнымъ нами опредѣленіямъ, мы должны размѣщеніе

3, 5, 1, 6, 2, 4

отнести ко второму классу, такъ какъ въ немъ 7 безпорядковъ. Слѣдовательно, соотвѣтственный этому размѣщенію членъ

$$a_3 b_5 c_1 d_6 e_2 f_4$$

войдетъ въ составъ опредѣлителя со знакомъ минусъ.

Вопросы.

Узнать, съ какимъ знакомъ войдутъ въ составъ опредѣлителей слѣдующіе члены:

1., $a_4 b_2 c_3 d_7 e_5 f_6 g_1$,

2., $a_3 b_4 c_2 d_1 e_5$,

3., $a_2 b_5 c_6 d_4 e_1 f_3$ ..

Итакъ, каждый членъ

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots\ldots p_\omega$$

опредѣлителя системы n^2 элементовъ

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots\ldots, & p_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots\ldots, & p_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots\ldots, & p_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots\ldots, & p_n \end{vmatrix}$$

входитъ въ составъ его со знакомъ плюсъ, если соотвѣтствующее размѣщеніе

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \omega$$

принадлежитъ къ первому классу; и со знакомъ минусъ, если оно принадлежитъ ко второму классу.

Отмѣтимъ главный членъ опредѣлителя, составленный изъ элементовъ, находящихся на діагонали, проведенной въ опредѣлителѣ (слѣва—направо, сверху—внизъ):

$$a_1 b_2 c_3 \ldots\ldots p_n ..$$

Главный членъ входитъ въ составъ опредѣлителя всегда съ плюсомъ, ибо ему соотвѣтствуетъ размѣщеніе

$$1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n,$$

гдѣ нѣтъ ни одного безпорядка (то-есть число безпорядковъ равно числу четному 0), такъ какъ всѣ нумера слѣдуютъ въ своемъ натуральномъ порядкѣ.

Часто употребляютъ слѣдующій сокращенный способъ выраженія опредѣлителя. Выписываютъ главный членъ, ставятъ передъ нимъ знаки: $\pm$ и Σ; тогда:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots\ldots, & p_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots\ldots, & p_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots\ldots, & p_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots\ldots, & p_n \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots\ldots p_n.$$

Мы этимъ способомъ не будемъ пользоваться.

Въ частномъ случаѣ, когда дѣло шло объ опредѣлителѣ 9^{ти} элементовъ, всѣ члены его были получены изъ главнаго

$$a_1 b_2 c_3$$

послѣдовательными перестановками по два нумера; именно: переставляя нумера 2 и 3, получимъ второй членъ

$$a_1 b_3 c_2;$$

переставляя затѣмъ нумера 1 и 2, получимъ