УРАВНЕНІЯ ДВИЖЕНІЯ ЭНЕРГІИ ВЪ ТѢЛАХЪ.

НИКОЛАЯ УМОВА.

ОДЕССА,
ВЪ ТИПОГРАФІИ УЛЬРИХА И ШУЛЬЦЕ.
1874.

Дозволено цензурою. Одесса, 5-го Марта 1874 г.

УРАВНЕНІЯ ДВИЖЕНІЯ ЭНЕРГІИ ВЪ ТѢЛАХЪ.

I. Общее выраженіе закона сохраненія энергіи въ элементѣ объема среды.

§ 1. *Опредѣленія и задача изслѣдованія.* Элементъ объема произвольно взятый внутри какой нибудь среды, частицы коей находятся въ движеніи, заключаетъ въ данный моментъ времени опредѣленное количество энергіи. Эта энергія слагается изъ двухъ частей: изъ живой силы движенія частицъ элемента объема и потенціальной энергіи т. е. работы, которая можетъ быть отдана этими частицами при возвращеніи ихъ изъ даннаго положенія въ нѣкоторое начальное, соотвѣтствующее устойчивому равновѣсію. Подъ энергіей элемента я буду разумѣть сумму живыхъ силъ частицъ элемента и его потенціальной энергіи, опредѣленной какъ было сказано выше.

Законы перехода энергіи съ одного элемента среды на другой опредѣлялись до сихъ поръ только для частныхъ формъ движеній. Задача настоящаго труда заключается въ установленіи на общихъ началахъ ученія о движеніи энергіи въ средахъ.

Раскрытіе общей связи между распредѣленіемъ и движеніемъ энергіи въ средахъ и перемѣщеніями ихъ частицъ, независимо отъ частныхъ формъ движеній, должно дать возможность изъ извѣстныхъ законовъ движенія и распредѣленія энергіи въ тѣлѣ — выводить заключенія о родѣ движеній его частицъ. Задачи подобнаго рода имѣютъ важность въ виду стремленія современной физики сводить всѣ явленія природы на явленія движенія.

Простѣйшія опытныя данныя, на которыя могли-бы опереться теоретическія изысканія современной физики, идущія въ указанномъ направленіи, представляютъ распредѣленія и движенія энергіи въ различныхъ явленіяхъ природы. Орудія опытнаго изслѣдованія не настолько однако усовершенствованы, чтобы давать возможность опредѣлять законы каждой изъ составныхъ частей энергіи въ отдѣльности. Поэтому важно отыскать методъ, который давалъ бы возможность перейти отъ опредѣленныхъ, путемъ опыта, законовъ движенія энергіи къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія частицъ тѣла, которое по предположенію даетъ мѣсто наблюдаемому явленію.

§ 2. Уравненіе сохраненія энергіи въ элементѣ тѣла. Представимъ себѣ однородную среду съ опредѣленными границами конечными или безконечно большими. Пусть на частицы этой среды не дѣйствуютъ внѣшнія силы, и приливъ энергіи къ частицамъ обусловливается принятіемъ или отдачею энергіи средою черезъ ея границы.

Если мы выдѣлимъ мысленно элементъ объема, измѣненіе его энергіи (т. е. суммы его живой силы и потенціальной энергіи), по закону сохраненія энергіи, можетъ совершиться только на счетъ прибыли или убыли послѣдней въ смѣжныхъ элементахъ. Математическое выраженіе связи приращенія количества энергіи въ элементѣ объема съ ея потерями въ смѣжныхъ элементахъ и будутъ математическимъ выраженіемъ элементарнаго закона сохраненія энергіи въ средахъ.

Математическое выраженіе указанной связи можетъ быть нами почерпнуто изъ явленія иного рода, опирающагося на законъ аналогичный закону сохраненія энергіи. Распредѣленіе вещества при движеніяхъ непрерывной, сжимаемой среды подчиняется закону сохраненія вещества. *Насколько* движеніе энергіи и движеніе сжимаемаго вещества обусловливаются закономъ ихъ сохраненія настолько мы имѣемъ право уподоблять движеніе энергіи движенію подвижнаго и сжимаемаго вещества.

Количество энергіи въ элементѣ объема среды, отнесенное къ единицѣ объема, можетъ быть названо плотностью энергіи въ данной точкѣ среды.

Мы можемъ слѣдить за измѣненіями происходящими въ количествѣ энергіи и ея скоростяхъ въ одной и той же точкѣ пространства или же въ одномъ и томъ же движущемся количествѣ (массѣ) энергіи.

Означимъ буквой $Э$ плотность энергіи въ произвольной точкѣ среды т. е. частное изъ количества энергіи, заключеннаго внутри безконечно малаго элемента объема на этотъ элементъ. Назовемъ черезъ l_x, l_y, l_z слагающія по прямоугольнымъ осямъ координатъ x, y и z, скорости, съ которою энергія движется въ разсматриваемой точкѣ среды.

Вообразимъ себѣ элементъ объема $dxdydz$. При введенныхъ нами обозначеніяхъ количества энергіи входящія и выходящія черезъ различныя стороны элемента будутъ: черезъ сторону

$$dydz : Эl_x\,dydz \quad \text{и ей паралельную} \quad -\left(Эl_x + \frac{dЭl_x}{dx}dx\right) dydz$$

$$dxdz : Эl_y dxdz \quad \text{и} \quad — \quad — \quad -\left(Эl_y + \frac{dЭl_y}{dy}dy\right) dxdz \qquad (1)$$

$$dydz : Эl_z dydx \quad \text{и} \quad — \quad — \quad -\left(Эl_z + \frac{dЭl_z}{dz}dz\right) dydz$$

Сумма этихъ величинъ, представляющихъ токи энергіи, даетъ намъ, отнесенное къ единицѣ времени, измѣненіе количества энергіи $Эdxdydz$ въ элементѣ объема съ временемъ t. Слѣдовательно, дѣлая сокращенія:

$$-\frac{dЭ}{dt} = \frac{dЭl_x}{dx} + \frac{dЭl_y}{dy} + \frac{dЭl_z}{dz} \qquad \text{(I)}$$

Здѣсь $\frac{dЭ}{dt}$ есть частная производная отъ $Э$ по времени. Выраженіе (I), аналогичное съ выраженіемъ закона сохраненія вещества въ гидродинамикѣ, есть выраженіе элементарнаго закона сохраненія энергіи въ тѣлахъ.

Означая черезъ $\frac{\partial Э}{\partial t}$ полную производную отъ $Э$ по времени, мы находимъ слѣдующее выраженіе для измѣненія плотности энергіи съ временемъ въ одной и той же движущейся массѣ энергіи:

$$\frac{\partial Э}{\partial t} = \frac{dЭ}{dt} + \frac{dЭ}{dx} l_x + \frac{dЭ}{dy} l_y + \frac{dЭ}{dz} l_z \tag{2}$$

Соединяя выраженіе (2) съ (I) находимъ:

$$-\frac{1}{Э} \cdot \frac{\partial Э}{\partial t} = \frac{dl_x}{dx} + \frac{dl_y}{dy} + \frac{dl_z}{dz} \tag{I bis}$$

Аналогія между дифференціальными законами движенія энергіи и движенія вещества вообще не простирается далѣе сходства уравненій (I) и (I bis) съ соотвѣтственными уравненіями гидродинамики.

Выраженіе (I) открываетъ связь между количествомъ энергіи, отнесеннымъ къ единицѣ времени, втекающемъ въ среду черезъ ея границы и измѣненіемъ количества энергіи въ средѣ. Мы находимъ:

$$\iiint \frac{dЭ}{dt} dx dy dz + \iint Э l_n d\sigma = o \tag{3}$$

гдѣ тройной интегралъ распространяется на весь объемъ среды, $d\sigma$ представляетъ элементъ ея границы и l_n есть скорость движенія энергіи по внѣшней нормали n къ элементу границы т. е.

$$l_n = l_x cos nx + l_y cos ny + l_z cos nz \tag{4}$$

§ 3. Связь законовъ движенія энергіи съ законами частичныхъ движеній средъ. Дифференціальные законы дви-

женій частицъ различныхъ средъ даютъ, какъ извѣстно, возможность установить математическое выраженіе, представляющее законъ сохраненія энергіи для всей среды. Если черезъ δJ означимъ приращеніе живой силы въ элементѣ объема среды, черезъ δW — приращеніе работы частичныхъ силъ элемента, и черезъ δL — приращеніе работы давленій на элементѣ $d\sigma$ поверхности тѣла, причемъ всѣ эти приращенія отнесены къ единицѣ времени, мы всегда имѣемъ возможность по основнымъ дифференціальнымъ законамъ движеній частицъ среды, составить слѣдующее выраженіе, причемъ предполагается, что внѣшнія силы не дѣйствуютъ на частицы среды:

$$\iiint (\delta J + \delta W)\, d\omega + \iint \delta L d\sigma = o \qquad (5)$$

Въ этомъ выраженіи $d\omega$ представляетъ элементъ объема среды, тройной интегралъ распространяется на всю среду, а двойной— на ея поверхность. Выраженіе (5) представляетъ не что иное, какъ законъ сохраненія энергіи для всей среды.

Для данной среды подобное выраженіе можетъ быть составлено еще другимъ образомъ, исходя изъ уравненія (I). Умножая обѣ части этаго уравненія на элементъ объема $d\omega$ и интегрируя на всю среду мы находимъ:

$$\iiint \frac{d\Theta}{dt} d\omega + \iiint \left[\frac{d(\Theta l_x)}{dx} + \frac{d(\Theta l_y)}{dy} + \frac{d(\Theta l_z)}{dz}\right] d\omega = o \quad (6)$$

или преобразовывая второй тройной интегралъ:

$$\iiint \frac{d\Theta}{dt}\, d\omega + \iint \Theta l_n d\sigma = o \qquad (7)$$

Тройной интегралъ входящій въ это выраженіе, представляющее законъ сохраненія энергіи для всей среды, долженъ быть тождественъ съ тройнымъ интеграломъ, входящимъ въ выраженіе (5). Но двойной интегралъ входящій въ выраженіе (7) преобразуется во второй тройной интегралъ выраженія (6), слѣдовательно и двойной интегралъ, входящій въ выраженіе (5) долженъ преобразоваться въ тройной интегралъ, тожественный со вторымъ тройнымъ интеграломъ входящимъ въ выраженіе (6). Математическое выраженіе этого тожества и приведетъ къ выраженіямъ связывающимъ законы движенія и распредѣленія энергіи съ частичными движеніями средъ.

II. Уравненія движенія энергіи въ различныхъ тѣлахъ.

§ 4. Уравненія движенія энергіи въ твердыхъ тѣлахъ постоянной упругости. Означимъ черезъ u, v, w перемѣщенія, по осямъ прямоугольныхъ координатъ, центра тяжести элемента объема, черезъ p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}— нормальныя и черезъ p_{xy}, p_{yz}, p_{xz} — тангенціальныя силы упругости, дѣйствующія на стороны безконечно малаго параллелепипеда (при чемъ натяженія принимаются положительными, а давленія отрицательными), и черезъ ρ — плотность въ какой нибудь точкѣ среды. Полагая далѣе

$$\delta u = \frac{du}{dt} = u', \; \delta v = \frac{dv}{dt} = v', \; \delta w = \frac{dw}{dt} = w' \tag{8}$$

мы найдемъ слѣдующее выраженіе закона сохраненія энергіи для всего упругаго тѣла:

$$\int\int\int \frac{\rho}{2}\delta(u'^2 + v'^2 + w'^2)d\omega + \int\int\int\Big[p_{xx}\frac{d\delta u}{dx} + p_{yy}\frac{d\delta v}{dy} + p_{zz}\frac{d\delta w}{dz} + p_{yz}\left(\frac{d\delta v}{dz} + \frac{d\delta w}{dy}\right) + p_{xz}\left(\frac{d\delta w}{dx} + \frac{d\delta u}{dz}\right) + p_{xy}\left(\frac{d\delta u}{dy} + \frac{d\delta v}{dx}\right)\Big]d\omega$$

$$- \int\int \{\delta u\,(p_{xx}\cos nx + p_{xy}\cos ny + p_{zx}\cos nz) + \delta v\,(p_{xy}\cos nx + p_{yy}\cos ny + p_{yz}\cos nz) + \delta w\,(p_{xz}\cos nx + p_{yz}\cos nz + p_{zz}\cos nz)\}\, d\sigma = o \tag{9}$$

Первые два тройные интегралы представляютъ приращеніе энергіи, отнесенное къ единицѣ времени, во всей упругой средѣ. Двойной интегралъ распространяется на всю поверхность среды и представляетъ работу внѣшнихъ давленій. Мы опускаемъ дѣйствіе внѣшнихъ силъ на элементы упругой среды. Обращая вниманіе на значеніе величинъ δu, δv и δw по формулѣ (8), мы замѣчаемъ, что двойной интегралъ выраженія (9) преобразуется въ слѣдующій тройной интегралъ:

$$\int\int\int d\omega \left\{ \begin{array}{l} +\frac{d}{dx}(p_{xx}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w') \\ \\ +\frac{d}{dy}(p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w') \\ \\ +\frac{d}{dz}(p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w') \end{array} \right\} \qquad (10)$$

Такъ какъ первые два тройные интегралы выраженія (9) тожественны съ первымъ тройнымъ интеграломъ выраженія (6), то двойной интегралъ, входящій въ выраженіе (9) взятый съ тѣмъ знакомъ, съ которымъ онъ входитъ въ это выраженіе, или тожественный съ нимъ тройной интегралъ (10) взятый съ отрицательнымъ знакомъ, долженъ быть тожественнъ со вторымъ тройнымъ интеграломъ, входящимъ въ выраженіе (6); слѣдовательно подъинтегральная функція тройнаго интеграла (10), взятая съ отрицательнымъ знакомъ должна быть тожественна подъинтегральной функціи втораго тройнаго интеграла выраженія (6), или что все равно второй части уравненія (I). Это заключеніе легко повѣряется при помощи основныхъ уравненій упругости, дающихъ возможность преобразовать сумму подъинтегральныхъ функцій первыхъ двухъ тройныхъ интеграловъ, входящихъ въ выраженіе (9), тожественную съ $\frac{dЭ}{dt}$, въ отрицательную подъинтегральную функцію выраженія (10). Изъ тожества этой послѣдней со второй частью уравненія (I) вытекаютъ слѣдующія равенства:

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{E}l_x &= p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w' \\
-\mathfrak{E}l_y &= p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w' \\
-\mathfrak{E}l_z &= p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'
\end{aligned} \tag{11}
$$

Откуда заключаемъ: *количество энергіи, протекающее черезъ безконечно малый плоскій элементъ въ безконечно малое время, равно отрицательной работѣ силъ упругости, дѣйствующихъ на этотъ элементъ.*

Найденныя выраженія (11) представляютъ связь законовъ движенія энергіи съ законами частичныхъ движеній твердаго тѣла постоянной упругости. Къ правымъ частямъ этихъ выраженій не прибавлены функціи зависящія только отъ координатъ (y, z), (z, x), (x, y) ибо лѣвыя части должны обращаться въ нуль когда $u' = v' = w' = o$.

§ 5. Для выясненія найденныхъ нами заключеній приложимъ формулы (10) къ опредѣленію скорости распространенія въ упругой средѣ плоскихъ волнъ съ продольными и поперечными колебаніями.

Разсмотримъ колебанія продольныя. Пусть несущія ихъ плоскія волны перпендикулярны къ оси x. Слѣдовательно

$$v = o, \qquad w = o \tag{12}$$

Положимъ кромѣ того

$$u = A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) \tag{13}$$

гдѣ Ω есть искомая скорость распространенія продольныхъ колебаній. Пользуясь выраженіями силъ упругости данными Ламе мы имѣемъ въ нашемъ случаѣ:

$$p_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx} \qquad p_{yz} = o$$

$$p_{yy} = \lambda\frac{du}{dx} \qquad p_{xy} = o \tag{14}$$

$$p_{zz} = \lambda\frac{du}{dx} \qquad p_{xz} = o$$

Кромѣ того мы имѣемъ;

$$\frac{d\mathit{Э}}{dt} = \frac{\rho}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + p_{xx}\frac{d\,\frac{du}{dt}}{dx} \tag{15}$$

Интегрируя это выраженіе по времени, имѣемъ:

$$\mathit{Э} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \tag{16}$$

Вставляя сюда величину u, находимъ:

$$\mathit{Э} = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2}\left(\rho + \frac{2\mu + \lambda}{\Omega^2}\right) sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) \tag{17}$$

Съ другой стороны подставляя (13) и (14) въ (11) находимъ:

$$- \mathit{Э}l_x = -(\lambda + 2\mu)\frac{4\pi^2 A^2}{\Omega T^2}\, sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\Omega}\right)$$

$$- \mathit{Э}l_y = o \tag{18}$$

$$- \mathit{Э}l_z = o$$

Послѣднія два соотношенія даютъ $l_y = o$, $l_z = o$. Слѣдовательно $l_x = \Omega$ и первое изъ соотношеній (18) по сокращеніи общихъ факторовъ даетъ соотношеніе: