АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

3,3

Vashchenko-Zakharchenko, Mikhail Egorovich.

Alexander Ziwet

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДВУХЪ И ТРЕХЪ ИЗМѢРЕНІЙ.

СОЧИНЕНІЕ

М. Е. Ващенко-Захарченко,

Сверхштатнаго Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра.

КІЕВЪ.

Въ Типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра.

1887.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-30-1923

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра, 15 Ноября 1886 года.

Ректоръ *Н. Ренненкампфъ.*

Продается въ книжныхъ магазинахъ Н. Я. Оглоблина:

Кіевъ, Крещатикъ, № 33. | С.-Петербургъ, Малая Садовая, № 4.

Иглэх

Предисловіе.

До XVII столѣтія не существовало никакого общаго метода для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ, а въ XVI в., когда были положены первыя основы алгебры, она была приложена и къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ, но въ каждомъ отдѣльномъ вопросѣ, величины данныя и искомыя обозначались буквами и по условіямъ задачи составлялись уравненія, которыя затѣмъ рѣшались алгебраическими способами, въ результатѣ получалось алгебраическое выраженіе, которое требовалось построить геометрически. Смотря по расположенію данныхъ въ задачѣ, такое построеніе бываетъ возможно или невозможно, поэтому и задача, хотя и рѣшена комбинаціей алгебраическихъ символовъ, но конкретнаго значенія не представляетъ. Стараясь истолковать геометрически всякое алгебраическое выраженіе, дающее рѣшеніе геометрической задачи, геометры нашли геометрическое значеніе отрицательныхъ рѣшеній и предложили нѣсколько способовъ для геометрическаго представленія мнимыхъ — воображаемыхъ количествъ. Геометрическое значеніе отрицательныхъ количествъ и разсматриваніе мнимыхъ результатовъ, какъ рѣшенія, хотя не конкретныхъ представленій, но отвлеченныхъ, дало такую общность изслѣдованіямъ, которой древніе геометры не могли достигнуть и это потому, что всѣ ихъ разсужденія происходили на чертежѣ, символами своихъ количественныхъ мыслей они не выражали, поэтому они не пришли ни къ отрицательнымъ, ни къ мнимымъ рѣшеніямъ, которыя дали возможность включить въ одно выраженіе всѣ случаи расположенія данныхъ въ задачѣ; случаи эти древніе геометры должны были разсматривать и доказывать отдѣльно.

Введеніе мнимыхъ выраженій дало возможность геометрамъ выражать предложенія между геометрическими данными, когда эти данныя такъ расположены, что предложеніе конкретно перестаетъ существовать —глазъ не видитъ, но отвлеченная комбинація символовъ не перестаетъ выражать свойство исчезнувшее для глаза, являющееся опять въ дальнѣйшихъ комбинаціяхъ конкретно въ видѣ предложенія, которое безъ этого могло-бы остаться неизвѣстнымъ. Безъ мнимыхъ—воображаемыхъ количествъ многія предложенія въ геометріи не было-бы возможности доказать.

Такая частность пріемовъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ и доказательствъ предложеній алгебраическимъ путемъ происходила отъ того, что не имѣли способовъ выражать уравненіями основныхъ элементовъ геометріи точки и прямой, точки и плоскости. Что такое точка? Обыкновенно точку опредѣляютъ, говоря, *что это есть геометрическое мѣсто въ пространствѣ, неимѣющее измѣренія.* Затѣмъ, если примемъ, что это опредѣленіе даетъ возможность составить отчетливое понятіе объ этомъ элементѣ, то прямую опредѣляютъ, говоря, *что прямая есть такая линія, которая вполнѣ опредѣляется двумя данными точками;* изъ этого опредѣленія непосредственно слѣдуетъ: что двѣ прямыя пересѣкаются только въ одной точкѣ. Если теперь замѣтимъ, что въ силу постулата Евклида, двѣ прямыя линіи на плоскости всегда пересѣкаются въ одной точкѣ, конечной или безконечно-удаленной, то мы будемъ имѣть слѣдующую взаимность между точкою и прямою: *прямая опредѣляется двумя точками, а точка двумя прямыми.* Изъ этого видимъ, что въ отвлеченномъ опредѣленіи, между точкою и прямою нѣтъ разницы, разница состоитъ въ ихъ конкретномъ представленіи, которое не имѣетъ никакого значенія, такъ какъ всѣ дальнѣйшія изслѣдованія вытекаютъ изъ отвлеченнаго опредѣленія, а не изъ конкретнаго ихъ представленія. Такая же взаимность существуетъ между точкою и плоскостью въ пространствѣ.

Итакъ, какой-бы ни взяли изъ этихъ двухъ элементовъ за основной, другой будетъ имъ опредѣляться тождественнымъ выраженіемъ въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно эти два элемента мы должны принимать какъ данные — извѣстные, ясно представляемые. Изъ сказаннаго также видимъ, что необходимо два элемента въ плоскости или три элемента въ пространствѣ одного рода для опредѣленія одного элемента другаго рода—двѣ точки для прямой и двѣ прямыя для точки, три точки для плоскости и три плоскости для точки, слѣдовательно, если-бы можно было одинъ изъ элементовъ—точку или прямую, или плоскость, выразить уравненіемъ, то другой выразится двумя уравненіями. Изъ такой зависимости между элементами — точкою и прямою на плоскости, точкою и плоскостью въ пространствѣ, вытекъ методъ двойственности, обобщившій геометрическое значеніе алгебраическихъ уравненій.

Первая мысль общаго алгебраическаго способа, для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ и изслѣдованій вообще, принадлежитъ французскому философу и геометру Декарту, который въ своей „Геометріи“, въ 1637 г., далъ первыя основы такого метода изслѣдованій и приложилъ его къ коническимъ сѣченіямъ.

Методъ Декарта, извѣстный въ настоящее время подъ именемъ Аналитической Геометріи, даетъ возможность выразить уравненіемъ между двумя перемѣнными количествами, всякую плоскую кривую, если ея свойство присущее каждой ея точкѣ извѣстно, и, обратно, каждое уравненіе съ двумя перемѣнными количествами, представить геометрической фигурой. Онъ даетъ способъ выразить уравненіемъ между тремя перемѣнными всякую поверхность въ пространствѣ, если извѣстно свойство каждой ея точки, и обратно, каждое уравненіе между тремя перемѣнными представляетъ поверхность. Такимъ образомъ вмѣсто чертежа геометръ имѣетъ передъ глазами рядъ уравненій, въ которыхъ неявно включены всѣ свойства геометрическихъ фигуръ, подлежащихъ изслѣдованію, всѣ разсужденія обращаются въ комбинацію отвлеченныхъ алгебраическихъ законовъ, синтезъ древнихъ геометровъ потерялъ свою силу, напряженная дѣятельность мышленія и воображенія замѣняется алгебраическими преобразованіями одного выраженія въ другое, непрерывная цѣпь среднихъ разсужденій обращается въ механическія преобразованія, такъ что результатъ изслѣдованій является, какъ бы полученнымъ изъ хаоса и часто въ такой сложной комбинаціи алгебраическихъ символовъ, что не представляется возможности выяснить его геометрическое значеніе. Вотъ почему Ньютонъ, Маклоренъ, Лейбницъ и другіе геометры свои изслѣдованія по новому методу переводили на синтезъ древнихъ геометровъ, такъ какъ считали новый методъ механическимъ. Но такой недостатокъ былъ устраненъ, по мѣрѣ развитія этого замѣчательнаго метода, которому обязаны своимъ развитіемъ механика, физика и астрономія.

Усовершенствованія координатнаго метода Декарта были сдѣланы введеніемъ понятія *двойственности* и введеніемъ метода проэкцій. Двойственность состоитъ въ томъ, что на каждое уравненіе можно смотрѣть съ двухъ точекъ зрѣнія: какъ на выраженіе перемѣщенія точки на плоскости или въ пространствѣ, или какъ на перемѣщеніе прямой на плоскости или плоскости въ пространствѣ. Такой взглядъ на уравненіе даетъ возможность переходить отъ предложеній относительно точекъ къ предложеніямъ относительно прямой или плоскости въ пространствѣ, и обратно. Такое воззрѣніе на аналитическое уравненіе дало необыкновенную общность методу Декарта. Какъ частный случай двойственности представляется методъ взаимныхъ поляръ, такъ изящно разработанный Понселе. Методъ проэкцій, въ которомъ переходятъ отъ предложеній относительно точекъ къ предложеніямъ также относительно точекъ, отъ предложеній относительно прямой и плоскости къ предложеніямъ также относительно прямой и плоскости. Этотъ послѣдній методъ достигъ въ настоящее время такого совершенства, что споритъ съ методомъ Декарта и сдѣлался совершенно независимымъ отъ этого послѣдняго.

Въ методѣ Декарта трудно, иногда, бываетъ усмотрѣть геометрическое значеніе извѣстнаго результата, выраженнаго комбинаціей алгебраическихъ символовъ, а тѣмъ болѣе построить такое выраженіе. Это заставило геометровъ нашего столѣтія обратить вниманіе на чисто геометрическіе пріемы, слѣдствіемъ чего было появленіе сочиненій подъ различными названіями, каковы: „Высшая Геометрія“ (Géométrie supérieure, Höhere Geometrie), „Новая Геометрія“ (Modern Geometry, Neuere Geometrie), „Геометрія положенія“ (Géométrie de position, Geometrie der Lage), и тому подобныя названія. Въ настоящее время наука эта извѣстна подъ названіемъ „Проэктивной Геометріи“ въ силу того, что она основана на методѣ проэкцій. Изъ нея алгебраическіе пріемы совершенно устранены. До того просты методы проэктивной геометріи, что Штаудтъ написалъ свое замѣчательное сочиненіе „Geometrie der Lage“, предполагая даже незнакомство читателя съ элементарной геометріей. Самыя трудныя задачи и свойства фигуръ на плоскости и въ пространствѣ не ускользаютъ отъ этого метода, который имѣетъ громадное техническое приложеніе: въ перспективѣ, архитектурѣ; механикѣ и вообще во всѣхъ техническихъ отрасляхъ знанія. Предложенія служащія основаніемъ метода проэкцій „ангармонія и гармонія“ мы уже встрѣчаемъ въ сочиненіяхъ Аппполонія Пергскаго, Паппа, Дезарга, а полное развитіе—проэктивнаго метода, хотя не чисто геометрическое, дали Шаль, Понселе, Штейнеръ, Мёбіусъ и другіе, но ту чисто геометрическую форму, о которой мы упоминали, этому методу далъ Штаудтъ. Изученіе этого метода рядомъ съ методомъ Декарта даетъ ясное пониманіе весьма сложныхъ алгебраическихъ выраженій. Мы выше сказали, что Штаудтъ написалъ свою „Geometrie der Lage“ не предполагая даже знакомства читателя съ „Началами“ Евклида, поэтому элементарный курсъ проэктивной геометріи въ начальныхъ техническихъ школахъ принесъ бы несомнѣнную пользу будущимъ практическимъ техникамъ.

Затѣмъ введенъ былъ въ Аналитическую Геометрію способъ сокращеннаго обозначенія уравненій прямой и точки въ нормальныхъ формахъ, который собственно есть ничто иное, какъ неявный переходъ отъ одной системы координатъ къ другой. Съ помощью его часто избѣгаютъ весьма сложныхъ вычисленій и преобразованій.

Наконецъ введеніе трилинейной и тетраэдрической системъ координатъ дало такую общность координатному методу Декарта, что этотъ послѣдній сдѣлался частнымъ случаемъ трилинейнаго и тетраэдрическаго.

Скажу теперь нѣсколько словъ о цѣли и содержаніи настоящаго сочиненія. Основаніемъ его послужили лекціи, читанныя мною въ Императорскомъ университетѣ св. Владиміра, которыя были разработаны по болѣе извѣстнымъ сочиненіямъ по Аналитической Геометріи, существующимъ въ западно-европейской математической литературѣ. Если сравнить курсы Аналитической Геометріи, написанные въ началѣ настоящаго столѣтія, какъ напр. курсъ Бурдона, съ курсами написанными въ послѣдніе годы, то легко видѣть ту громадную разницу, которая существуетъ между ними. Читая курсъ Аналитической Геометріи въ продолженіи болѣе двадцати лѣтъ и слѣдя постоянно за развитіемъ этой части математики я пополнялъ и свои лекціи тѣми методами, которые явились въ этотъ промежутокъ времени. Такимъ образомъ было написано настоящее сочиненіе, содержаніе котораго вкратцѣ привожу.

Прежде всего я предпосылаю историческій очеркъ развитія Аналит. Геом., начиная отъ Віета, т. е. съ XVI вѣка, до настоящаго времени, въ которомъ упоминаются всѣ почти сочиненія вышедшія въ этотъ трехсотлѣтній промежутокъ времени, при чемъ указывается на содержаніе сочиненій и что принадлежитъ каждому изъ авторовъ въ исторіи развитія этой отрасли математическихъ наукъ*). За историческимъ очеркомъ слѣдуетъ изложеніе содержанія самого предмема.

Все сочиненіе состоитъ изъ двухъ частей: въ первой части излагается Аналитическая Геометрія на плоскости, а во второй—въ пространствѣ. Вторая часть изложена кратче, такъ какъ въ сущности это есть повтореніе первой, только съ добавленіемъ третьей координаты; болѣе подробно изложены тѣ части ея, которыя существенно отличаются отъ Анал. Геом. на плоскости. Передаемъ вкратцѣ содержаніе отдѣльныхъ главъ.

Первая часть. Въ гл. I изложенъ методъ координатъ Декарта съ пояснительными, необходимыми впослѣдствіи примѣрами, и на одномъ изъ нихъ дано понятіе о геометрическомъ мѣстѣ. Также дано представленіе о полярныхъ координатахъ, а въ концѣ помѣщены пояснительные примѣры. Въ гл. II излагается обстоятельно представленіе уравненіями геометрическихъ мѣстъ и показывается, какъ представляются уравненіями прямая линія и всѣ коническія сѣченія: эллипсъ, гипербола, парабола и кругъ, какъ частный случай эллипса. Далѣе показаны уравненія нѣсколькихъ кривыхъ третьей и четвертой степеней, каковы конхоида, циссоида и др., и наконецъ нѣсколько трансцендентныхъ кривыхъ. Въ гл. III изложено преобразованіе координатъ. Въ гл. IV показаны всѣ виды уравненія прямой и даны примѣры для поясненій. Въ гл. V и VI изложена двой-

*) Очеркъ этотъ былъ уже нами напечатанъ въ 1884 году, отдѣльною брошюрой; въ настоящее время мы его немного дополнили.

ственность координатъ; всѣ виды уравненія точки и примѣры. Въ гл. VII показанъ сокращенный способъ и его приложеніе къ прямой и точкѣ. Въ гл. VIII даны задачи на прямую линію и точку—геометрическія мѣста. Въ гл. IX и X изложены ангармоническія свойства рядовъ точекъ и связокъ прямыхъ линій, и вообще все то, что извѣстно въ настоящее время подъ именемъ проэктивной геометріи, но изложено аналитически. Въ гл. XI излагается значеніе и свойства однородныхъ уравненій. Гл. XII посвящена трилинейной системѣ координатъ. Въ гл. XIII дано геометрическое понятіе о инваріантахъ и ихъ значеніи въ геометріи. Въ гл. XIV изложены свойства кривыхъ втораго порядка и ихъ дѣленіе на классы; въ гл. XV изложено тоже, но съ точки зрѣнія двойственности. Въ гл. XVI подробно изложены свойства всѣхъ трехъ родовъ коническихъ сѣченій и приведены примѣры. Въ гл. XVII и XVIII подробно изложены свойства круга и системы круговъ; все это пояснено примѣрами. Въ гл. XIX изложены условія, при которыхъ уравненіе второй степени распадается на два линейные множителя и представляетъ пару прямыхъ линій. Въ гл XX, XXI и XXII показаны условія пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій; ангармоническія ихъ свойства и инваріанты системъ коническихъ сѣченій; послѣдняя изъ этихъ главъ заканчивается построеніемъ коническихъ сѣченій по даннымъ пяти условіямъ. Въ гл. XXIII и XXIV показаны геометрическіе методы взаимныхъ поляръ и проэкцій; въ послѣдней изъ этихъ главъ въ концѣ показаны пересѣченія конуса плоскостью.

Вторая часть. Въ гл. XXV изложенъ методъ координатъ въ пространствѣ, при чемъ пояснено, что представляютъ уравненія съ тремя перемѣнными, съ двумя и съ однимъ; въ этой же главѣ показано рѣшеніе нѣкоторыхъ существенныхъ вопросовъ. Въ гл. XXVI изложены свойства и всѣ виды уравненія плоскости. Въ гл. XXVII показаны свойства прямой, различные виды ея уравненій, и примѣры для различныхъ взаимныхъ положеній прямой и плоскости. Въ гл. XXVIII изложена двойственность координатъ въ пространствѣ и примѣры, какъ для прямой, такъ и для плоскости; показано значеніе уравненія съ тремя перемѣнными съ точки зрѣнія двойственности. Гл. XXIX содержитъ сокращенный способъ и примѣры. Въ гл. XXX изложены: ангармонія, гармонія и инволюція связки плоскостей, а также примѣры. Въ гл. XXXI показано преобразованіе координатъ въ пространствѣ и система тетраэдрическихъ координатъ. Въ гл. XXXII и XXXIII изложены общія свойства поверхностей втораго порядка и второй степени, со стороны двойственности. Въ гл. XXXIV изложены роды поверхностей, ихъ дѣленіе на классы и признаки, по которымъ ихъ различаютъ. Въ гл. XXXVI показаны свойства центральныхъ поверхностей: эллипсоида, гиперболоида однополаго и двуполаго;

при этомъ приведены примѣры. Въ гл. XXXVII излагаются свойства поверхностей неимѣющихъ центра: эллиптическій параболоидъ и гиперболическій параболоидъ. Гл. XXXVIII посвящена шару и системамъ шаровъ. Въ гл. XXXIX изложены общія понятія о фокусахъ поверхностей, поверхности софокусныя, эллиптическія координаты и примѣры. Наконецъ гл. XL, послѣдняя, содержитъ образованіе поверхностей вообще и образованныхъ движеніемъ прямой въ особенности, какъ напр. поверхности цилиндрическія, коническія, коноидальныя, косыя и развертывающіяся.

Таково вкратцѣ содержаніе изданнаго мною сочиненія. Изъ общаго содержанія отдѣльныхъ главъ видно, что оно содержитъ всѣ части университетскаго курса Анал. Геом., но въ дополненномъ видѣ. Книга моя, я надѣюсь, можетъ служить пособіемъ къ изученію Аналитической Геометріи и къ ознакомленію съ современнымъ состояніемъ этого отдѣла геометріи, т. е. въ томъ видѣ, какой она получила благодаря трудамъ наиболѣе извѣстныхъ геометровъ, каковы: Салмонъ, Гессе и Клебшъ. Классическое сочиненіе Салмона „Коническія сѣченія" было мною переведено на русскій языкъ въ 1860 году. Въ настоящее время книга эта библіографическая рѣдкость. Къ тому же на русскомъ языкѣ была издана только Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній. Издавая настоящій трудъ я имѣлъ въ виду пополнить этотъ пробѣлъ и надѣюсь, что книга моя принесетъ учащимся такую же пользу, какую принесло русское изданіе „Коническихъ сѣченій" Салмона двадцать лѣтъ тому назадъ. Первоначально трудъ мой былъ дважды изданъ литографически въ 1883 и 1884 годахъ. Сдѣлавъ нѣкоторыя измѣненія и исправленія я рѣшился его напечатать.

При составленіи настоящаго сочиненія я пользовался, главнымъ образомъ, классическими трудами Салмона, сочиненіями Клебша, Гессе и прекраснымъ курсомъ Аналитической Геометріи, составленнымъ профессоромъ Лувенскаго университета Карнуа. Привожу ниже болѣе подробный перечень главныхъ пособій, которыми я пользовался при чтеніи лекцій въ университетѣ и при изданіи настоящаго сочиненія.

Baltzer, Analytische Geometrie. Leipzig, 1882, in-8.

Bourdon, Application de l'Algèbre à la Géométrie comprenant la géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Paris, 4 ed. 1837 in-8.

Carnoy, Cours de Géométrie analytique, Vol. I. Géométrie plane; 3 ed. 1880, Paris, in-8.—Vol. II. Géométrie de l'espace; 3 ed. 1881, Paris, in-8.

Chasles, Traité de Géométrie supérieure. Paris, 1852, in-8.

Chasles, Traité des Sections coniques, 1-e partie. Paris, 1865, in-8.

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Hrsg. v. Lindemann. Bd. I, Th. 1—2. Leipzig, 1875. Также французское изданіе: Leçons sur la Géométrie. T. I—III, Paris, 1879—80—83, in-8.

Cremona, Elementi di geometria projectiva. Vol I. Roma, 1873. in-8.
Cremona, Introduzione ad una theoria geometrica delle Curve piane. Bologna, 1862, in-4.
De Volson Wood, The elements of Coördinate Geometry in three parts. I. Cartesian Geometry, II. Quaternions, III. Modern Geometry. New edition. New-York. 1882, in-8.
Hesse, Vorlesungen über die Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene. Leipzig, 1865, in-8. —3 Aufl., rev. von S. Gundelfinger. Leipzig, 1881, in-8.
Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raums. Leipzig, 1861, in-8.—3 Aufl. rev. von S. Gundelfinger. Leipzig, 1876, in-8.
Hesse, Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie. Leipzig, 1866, in-8.
Hesse, Sieben Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig, 1874, in-8.
Reye, Die Geometrie der Lage. Verträge von Dr. Th. Reye. 2 Aufl. Hanover, 1877—80, in-8.
Salmon, A treatise on Conic Sections. 3 ed. London, 1855, in-8.
Salmon, A treatise on Conic Sections. 6 ed. London, 1879, in-8.
Salmon, Analytic Geometry of three dimensions. 3 ed. Dublin, 1874, in-8.
Salmon, Treatise on the higher plane curves. 2 ed. Dublin, 1878, in-8.
Стрекаловъ, Курсъ аналитической геометріи. Т. I. Кривыя перваго порядка и перваго класса. СПБ. 1884, in-8.

Въ заключеніе считаю долгомъ принесть искреннюю благодарность Совѣту Императорскаго университета св. Владиміра за пособіе, оказанное при напечатаніи настоящаго сочиненія.

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ, февраль 1887 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Часть первая.—Аналитическая геометрія двухъ измѣреній.

Часть вторая.—Аналитическая геометрія трехъ измѣреній.