КЪ ВОПРОСУ

О

РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ

ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

Д. М. СИНЦОВА.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1897.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*

(Извѣстія Физико-Математическаго Общества Сер. 2. Т. VII).

КЪ ВОПРОСУ О РАЦІОНАЛЬНОМЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ,

(По поводу изслѣдованій Ліувилля и Имшенецкаго).

Въ 1893 и 1894 годахъ вниманіе русскихъ математиковъ было привлечено къ вопросу, поставленному въ заголовкѣ настоящей статьи, полемикою, возникшею относительно сравнительнаго достоинства методовъ, предложенныхъ для рѣшенія его извѣстнымъ французскимъ математикомъ Ліувиллемъ въ 1834 г. и бывшимъ профессоромъ Казанскаго Университета академ. В. Г. Имшенецкимъ (нынѣ уже покойнымъ) въ 1887 году. Взявши на себя по предложенію пр. А. В. Васильева реферированіе работъ, написанныхъ русскими математиками по этому поводу, для Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik я убѣдился при изученіи ихъ, что въ то время какъ способъ Имшенецкаго былъ подвергнутъ тщательному изученію и разработкѣ, въ иномъ совершенно положеніи стоитъ дѣло относительно способа Ліувилля и при томъ не въ русской только, но и въ иностранной литературѣ. Поэтому мнѣ казалось не безполезнымъ напечатать нѣкоторыя мои соображенія по этому предмету [1]), такъ какъ, чтобы отдать должное заслугамъ русскихъ ученыхъ, мы должны прежде всего внимательно изучить и оцѣнить работы ихъ иностранныхъ предшественниковъ и выяснить взаимное отношеніе тѣхъ и другихъ.

---

[1]) Сущность настоящей статьи послужила предметомъ сообщенія, сдѣланнаго въ засѣданіи Каз. Физ.-Мат. Об. 14 Окт. 1895 г. Недостатокъ времени помѣшалъ мнѣ однако до сихъ поръ редактировать ее въ окончательномъ видѣ.

Исторія вопроса такова. Въ ноябрѣ 1832 г. и февралѣ 1833 г., Ліувилль, тогда еще не бывшій членомъ Института, представилъ два мемуара Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique Mém. 1-er et 2^d. Мемуары эти были въ томъ же году напечатаны въ Journal de l' École R. Polytechn. Cah 22 (Sept. 1833), и въ Mémoires des Savants étrangers въ 1838. Отзывъ Пуассона былъ помѣщенъ въ 10-омъ томѣ Журнала Крелля—1833 г., при чемъ Ліувилль присоединилъ къ этому отзыву краткое изложеніе содержанія своихъ мемуаровъ въ нѣсколько иномъ освѣщеніи. Предметомъ работы Ліувилля было рѣшеніе вопроса о томъ, при какихъ условіяхъ алгебраическій дифференціалъ по интеграціи даетъ алгебраическую функцію, — вопроса, принадлежащаго къ категоріи вопросовъ о псевдоэллиптическихъ интегралахъ, которые были впервые поставлены Абелемъ и составили затѣмъ предметъ работъ Чебышева, позднѣе Вейерштрасса, Золотарева, Пташицкаго и др.

Въ первомъ мемуарѣ Ліувилль ограничивается *явными* алгебраическими функціями и давъ опредѣленіе такой функціи, доказываетъ теорему: *Если интегралъ* $\int\sqrt[n]{L}.dx$, *гдѣ* L *рац. ф. отъ* x, *имѣетъ алгебраическое значеніе, то оно непремѣнно д. б. вида* $\beta.\sqrt[n]{L}+Const.$, *гдѣ* β *рац. ф. отъ* x., и показываетъ затѣмъ, что означивъ $\sqrt{L}=\frac{M}{\sqrt[n]{T}}$ имѣемъ: *если уравненіе*:

$$MT=T\,\frac{d\theta}{dx}-\frac{\theta}{n}T' \qquad (1)$$

не имѣетъ цѣлаго рѣшенія θ, *то интегралъ* $\int\sqrt[n]{L}.dx=\int\frac{Mdx}{\sqrt[n]{T}}$ *не выражается алгебраически*; *въ противномъ случаѣ этотъ интегралъ* $=\frac{\theta}{\sqrt[n]{T}}+\text{Const}$. Такимъ образомъ все сводится къ нахожденію цѣлаго многочлена θ, удовлетворяющаго линейному диф. уравненію 1-го пор. (1). Это нахожденіе упрощается тѣмъ обстоятельствомъ, что 1° степень θ—если оно существуетъ— д. б. на единицу выше степени M, 2° если (1) переписать

$$\frac{\theta T'}{nT} = \frac{d\theta}{dx} - M,$$

то ясно, что $\theta T'$ дѣлится на T или θ дѣлится на U—произведеніи всѣхъ различныхъ линейныхъ множителей T.—

Отсюда получаются условія алг. интеграціи выраженій вида $P_1 = P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} + \ldots + \sqrt[q]{S}$ гдѣ $P, Q, R, \ldots S$—рац. ф. отъ x, причемъ Ліувилль пользуется теоремою, которой въ § 14 даетъ доказательство: *если* $F, G, H, \ldots K, P, Q, \ldots S$—*суть количества раціональныя, радикалы* $\sqrt[m]{P}, \sqrt[n]{Q}, \ldots \sqrt[q]{S}$ *неприводимые и различные, то сумма*

$$F + G\sqrt[m]{P} + H\sqrt[n]{Q} + \ldots + K\sqrt[q]{S}$$

можетъ быть равна нулю только при условіи, что

$$F = o,\ G = o,\ H = o, \ldots K = o.$$

Послѣдніе параграфы посвящены доказательству теоремы, которую Лапласъ въ своей Théorie analytique des probabilités принимаетъ, какъ принципъ, безъ доказательства, что интегралъ дифференціальнаго выраженія не можетъ содержать другихъ радикальныхъ количествъ, кромѣ тѣхъ, которыя входятъ въ эту функцію.—

Если y количество, опредѣленное, какъ корень уравненія

$$y^{\mu} - Ly^{\mu-1} - \ldots - My - N = o \qquad (1)$$

($L, M, \ldots N$—раціональныя функціи перемѣннаго x), то производную $\frac{dy}{dx}$ всегда можно выразить раціонально черезъ x и y, и вообще $\frac{df(x,y)}{dx}$,—производная алгебраической функціи $f(x,y)$,—можетъ содержать только тѣ радикалы, которые входятъ въ $f(x,y)$; замѣтивъ далѣе, что алгебраическія функціи двухъ количествъ могутъ быть классифицированы на разряды по сложности входящихъ въ нихъ радикаловъ, какъ и функціи одной перемѣнной, Ліувилль и приходитъ къ теоремѣ: *если интегралъ* $\int ydx$ *выражается алгебраически, то его значеніе равно раціональной функціи отъ* x *и* y.

Эта теорема является основою общаго метода, даваемаго Ліувиллемъ во 2-омъ мемуарѣ для рѣшенія вопроса. Въ этомъ 2-мъ мемуарѣ (ib. p. 149—193) Ліувилль доказываетъ слѣд. общую теорему: *если алгебраическая функція* y *явная или неявная, то всегда можно рѣшить, имѣетъ ли она интеграломъ алгебраическую функцію явную или неявную; при томъ, если вопросъ рѣшается утвердительно, тотъ же процессъ даетъ и самое значеніе* $\int ydx$.

Эта задача сводится на нахожденіе раціональныхъ рѣшеній нѣкоторой системы совокупныхъ уравненій, ибо по предыдущему, въ предположенномъ случаѣ алгебраическаго интегрированія мы должны имѣть

$$\int ydx = \varphi$$

гдѣ φ—рац. функціи отъ x и y—съ пом. (1) можетъ быть приведена къ виду

$$\varphi = p_0 + p_1 y + \,.\,.\, + p_{\mu-1} y^{\mu-1}.$$

Диференцируя имѣемъ

$$y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

и замѣняя $\frac{dy}{dx}$ его значеніемъ, получаемымъ диференцированіемъ (1), приходимъ къ уравненію

$$y = P_0 + P_1 y + \ldots + P_{\mu-1} y^{\mu-1}$$

Уравнивая коэффиціенты—рац. функціи отъ x и линейныя относительно $p_0, p_1, \ldots p_{\mu-1}$ и ихъ производныхъ (на основаніи помянутой выше теоремы), получимъ μ совокупныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка относительно $p_0, \ldots p_{\mu-1}$. Если можно найти систему раціональныхъ функцій, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, то данный интегралъ можетъ быть выраженъ алгебраической функціей. Но каждая совокупная система μ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть замѣнена однимъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ μ—го порядка; поэтому рѣшеніе поставленной сначала задачи Ліувилль сводитъ на такую:

Дано линейное дифференціальное уравненіе съ раціональными коэффиціентами, содержащими одну перемѣнную независимую y, но порядка какого-нибудь μ; требуется найти всѣ удовлетворяющія уравненію раціональныя значенія y.

Рѣшенію этой задачи, которая занимаетъ насъ главнымъ образомъ, и посвящена большая часть этого 2-го мемуара (Section 1-ère стр. 153—183), и только на послѣднихъ десяти страницахъ Ліувилль примѣняетъ полученные результаты къ поставленному въ заголовкѣ статьи общему вопросу, для рѣшенія котораго она является такимъ образомъ вспомогательнымъ средствомъ. Не совсѣмъ благопріятный отзывъ Пуассона [1]) о возможности и удобопримѣнимости этого способа нахожденія раціональныхъ рѣшеній побудилъ Ліувилля [2]), интересовавшагося главнымъ образомъ псевдоэллиптическими интегралами, а не

---

[1]) Приведенъ также въ соч. Имшенецкаго: Общій способъ etc., стр. 2 въ примѣчаніи; для неимѣющихъ его подъ руками привожу занимающее насъ мѣсто ниже.

[2]) Comptes rendus, а также Journal de Mathématiques, t. III (1838 г.) p. 20—24: Nouvelles recherches sur la détemination des intégrales dont la valeur est algébrique.

раціональными рѣшеніями линейныхъ уравненій, вернуться къ разсматриваемой имъ задачѣ и показать, что для рѣшенія вопроса, будетъ ли $\int ydx$ алгебраическимъ, не нужно даже искать раціональныхъ рѣшеній,—ибо знаменатель можно опредѣлить заранѣе,—это дискриминантъ уравненія, опредѣляющаго алгебраическую функцію y; вводя новыя зависимыя перемѣнныя, достаточно такимъ образомъ искать *цѣлыя* рѣшенія преобразованныхъ уравненій. Данныя имъ при этомъ безъ доказательства дифференціальныя уравненія для вышеупомянутыхъ $p_0{:}p_1\ldots$ были объяснены Raffy (Sur les quadratures algébriques et logarithmiques, Ann. Ec. Norm. (3) II. (1885) p. 185—206), который примыкаетъ къ этой второй работѣ Ліувилля считая, что именно сомнѣнія Пуассона заставили Ліувилля дать свой второй способъ, и не сомнѣваясь въ справедливости отзыва Пуассона.

Замѣчу теперь же, что подобное отрицательное отношеніе къ работамъ Ліувилля мы встрѣчаемъ у такого ученаго, какъ Halphen, который въ своемъ извѣстномъ Mémoire sur la réduction des équations différ. linéaires aux formes intégrables. Mém. Sav. Etr. XXVIII—(Gr. pr. 1880)—p. 110 выражается: A la vérité M. Liouville a donné dans de célébres Mémoires des principes, dont l'emploi dans les cas particuliers, conduit à reconnaitre si l'intégration d'une équation peut s'opérer sous forme finie et explicite par l'emploi des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles. Mais il faut le reconnaitre, l'application de ces principes est extrêmement difficile; et hors des cas très simples, où M. Liouville a pu les appliquer, grâce aux inépuisables ressources d'un talent supérieur, personne n'a tenté d'en faire usage".

Эта тирада относится къ цѣлому ряду работъ Ліувилля, въ которомъ первыми являются разбираемыя теперь нами, и достаточно характеризуетъ отношеніе къ нимъ спеціалистовъ. Въ такомъ положеніи было дѣло, когда—быть можетъ ознакомившись со статьею Raffy—В. Г. Имшенецкій заинтересовался этимъ вопросомъ. Изъ отзыва Пуассона онъ вынесъ отрицательное отношеніе къ способу Ліувилля и пришелъ поэтому къ мысли,—нельзя ли построить рѣшеніе вопроса на иныхъ началахъ. Плодомъ его занятій явился его способъ [1]). Въ обширной литературѣ, посвященной этимъ работамъ В. Г. Имшенецкаго, какъ упомянуто выше, не были подвергнуты изученію работы Ліувилля, да и въ отношеніи способа Имшенецкаго нельзя считать изслѣдованія законченнымъ: осталась незатронутою та сторона его изслѣдованій, въ которой онъ распространяетъ свой способъ на систему двухъ совокупныхъ уравненій, и на пересмотръ имъ рѣшенія Ліувиллемъ задачи относительно алгебраическаго интегрированія $\int y dx$ при (2),—при этомъ В. Г. замѣтилъ, что вопросъ можно поставить общнѣе, и тѣ же уравненія Ліувилля съ незначительнымъ измѣненіемъ въ лѣвыхъ частяхъ дадутъ алгебраическія рѣшенія $\int f(x,y)dx$ гдѣ y удовлетворяетъ (1), а $f(x,y)$—произвольная раціональная функція, которая однако всегда можетъ быть приведена къ многочлену $(\mu-1)$-ой степени.

Свои замѣтки по поводу работъ Ліувилля я начну съ указанія сущности тѣхъ замѣчаній, которыя были сдѣланы Пуассономъ въ упомянутомъ выше отзывѣ, и тѣхъ, которыя

---

[1]) Онъ изложенъ въ статьяхъ 1) «Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональн. коэфф. Зап. Ак. Н., т. LV. Прил. n° 9. Спб. 1887.—2) «Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нах. р. др. и. etc. Ibid. 1888 г. т. LVIII.— Кромѣ того, пр. П. А. Некрасовымъ возстановлено: «Сообщеніе акад. В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Моск. Мат. Об. 19 мая 1892 г. (Мат. сб. XVII. 391—X. 1893)

были добавлены къ этому В. Г. Имшенецкимъ въ 1-ой его работѣ. Послѣдующія замѣчанія, сдѣланныя русскими математиками, представляютъ развитіе замѣчаній В. Г. Имшенецкимъ, такъ какъ главнымъ предметомъ было изученіе работъ русскаго ученаго. — Пуассонъ въ своемъ отзывѣ говоритъ: „Ліувилль даетъ рѣшеніе этого вопроса (о дробныхъ интегралахъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій) въ случаѣ уравненія перваго порядка, онъ рѣшаетъ его также для уравненія 2. порядка, что требуетъ кропотливаго разбора могущихъ представиться случаевъ. Этотъ разборъ сталъ бы еще продолжительнѣе и сложнѣе для уравненія третьяго порядка и сталъ бы, можетъ быть, неосуществимымъ для дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ. И авторъ ограничился разсмотрѣніемъ уравненій 1. и 2. порядка и прибавилъ только, что методъ, которому онъ слѣдовалъ, приложимъ и къ другимъ уравненіямъ, чему мы дѣйствительно вѣримъ, поскольку это касается основаній его метода, если не считать возрастающей сложности счета, которая зависитъ впрочемъ можетъ быть, отъ самой сущности вопроса“. Этотъ отзывъ при всей его осторожности и ограниченіяхъ производитъ въ общемъ такое впечатлѣніе, что Пуассонъ отрицаетъ значеніе и практическую примѣнимость способа Ліувилля,—такъ понимали этотъ отзывъ самъ Ліувилль, Раффи, отрицательно относился къ способу Halphen. Неудивительно, что заинтересовавшись этимъ вопросомъ, и В. Г. Имшенецкій отнесся отрицательно къ способу Ліувилля; кромѣ того, онъ замѣтилъ еще одно обстоятельство, которое затрудняло примѣненіе способа Ліувилля въ томъ видѣ, какъ его далъ авторъ, — именно то, что для примѣненія его нужно имѣть полное рѣшеніе уравненія, которое получаемъ, приравнивая нулю коэффиціентъ при высшей производной въ данномъ линейномъ дифференціальномъ уравненіи,—

что можетъ быть иногда невозможно, какъ напр., въ случаѣ если этотъ коэффиціентъ имѣетъ видъ:

$$x^{11}+5pqx^7+3qx^6-5pqx^2-4q^2x$$

(примѣръ Имшенецкаго—Общій способъ" стр. 19). Сопоставляя вышеприведенные отзывы, а также мнѣнія, высказанныя нѣкоторыми русскими учеными [1]), занимавшимися этимъ вопросомъ, можно видѣть, что о способѣ Ліувилля составилось такое представленіе: Онъ страдаетъ отсутствіемъ общей идеи и заставляетъ разсматривать множество отдѣльныхъ частныхъ случаевъ, не связанныхъ общимъ принципомъ; благодаря этому онъ оказывается практически непримѣнимымъ, какъ только дѣло идетъ объ уравненіи порядка выше второго; для уравненій высшихъ порядковъ онъ даже можетъ быть совсѣмъ непримѣнимъ; при томъ, требуя знанія всѣхъ линейныхъ множителей нѣкотораго многочлена, онъ оказывается непримѣнимымъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда найти разложеніе этого многочлена на линейные множители оказывается невозможнымъ.

---

[1]) *К. А. Андреевъ.* О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя. Харьковъ 1893 (Сообщ. Х. Мат. Об. (2) IV).

П. А, Некрасовъ.—По поводу сообщенія К. А. Поссе (М. Сб. XVII. 391—4. *Его же.* Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алг. рац. др. рѣш. лин. диф. ур. М. Сб. XVII)—*Его же.* Нахожденіе алг. рац. рѣшеній лин. диф ур. съ алг. рац. коэф. Сообщ. Харьк. М. О. (2) IV. 1894.—*Его же.* Правило В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алг. рац. интеграловъ лин. дифф. уравненій. М. Сб. XVII.—*Его же.* Способъ В. П. Ермакова для нахожденія раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. М. Сб. XVIII. 1896. Также см:

И. Гюнтеръ. О нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій (М. Сб. XVII. 1894 г.). Статья эта имѣетъ наибольшее соприкосновеніе съ моей работой, но авторъ даетъ скорѣе свое видоизмѣненіе способа Ліувилля, тогда какъ я стремлюсь показать, что способъ Ліувилля приводитъ къ рѣшенію вопроса именно въ томъ видѣ, какъ его далъ авторъ.

К. А. Поссе.—Извлеченіе изъ письма къ Моск. Мат. Об. (Мат. Сб. XVII. 386—391. 1893).

Въ дальнѣйшемъ я постараюсь показать, что первый упрекъ относится *не къ сущности* способа Ліувилля, а къ *изложенію его* у автора. Я формулирую общее и крайне простое *правило*, къ которому въ существѣ своемъ сводится способъ Ліувилля и которое можно сопоставить съ формулированнымъ П. А. Некрасовымъ правиломъ В. Г. Имшенецкаго. Этимъ правиломъ способъ Ліувилля однако не исчерпывается: слѣдуя за Ліувиллемъ, мы можемъ проникнуть глубже въ сущность вопроса и на самомъ дѣлѣ выписать тѣ уравненія и неравенства, которыя даютъ численное значеніе показателя двучлена $x—a$ въ знаменателѣ дробнаго интеграла, Мнѣ кажется, это не недостатокъ, а достоинство способа Ліувилля ибо предварительное изученіе всѣхъ могущихъ представиться случаевъ чрезвычайно облегчаетъ примѣненіе способа къ част'нымъ примѣрамъ. Кажущаяся безсвязность отдѣльныхъ случаевъ зависитъ отъ способа изложенія. Дѣйствительно, характерную особенность Ліувилля составляетъ его стремленіе ставить загадки,—вспомнимъ его работы по теоріи чиселъ: онъ далъ рядъ формулъ безъ доказательствъ, которыя были найдены лишь спустя долгое время,—преимущественно трудами русскихъ математиковъ. Такъ поступилъ онъ и въ разсматриваемой работѣ: разобравъ подробно случаи уравненій 1. и 2. порядковъ, для остальныхъ онъ ограничился общими указаніями предоставивъ самому читателю вывести общее правило изъ разобранныхъ частныхъ случаевъ.—Что касается второго упрека, то надо замѣтить, что обстоятельство это было отмѣчено самимъ Ліувиллемъ, который сдѣлалъ первый шагъ къ устраненію его, но не совсѣмъ удачный выборъ способа разложенія многочлена не далъ ему особенно изящныхъ результатовъ, и потому онъ ограничился разсмотрѣніемъ уравненія перваго порядка, такъ какъ для дальнѣйшихъ, хотя и можно видѣть возможность примѣненія способа, но предварительный разборъ возможныхъ частныхъ случаевъ не оказывался легкимъ. Легкимъ и естестеннымъ распространеніемъ способа Ліувилля мнѣ удалось обнаружить примѣнимость его во всѣхъ случаяхъ. Я предполагаю сначала, что извѣстно разложеніе коэффиціента при высшей производной на неприводимые множители, и показываю, что способъ Ліувилля сохраняется при этомъ всецѣло, лишь слегка видоизмѣняются неравенства и уравненія для показателей. Обращаясь далѣе къ тому случаю, когда это разложеніе неизвѣстно, я показываю, какъ можно въ этомъ случаѣ помощью конечнаго числа раціонально выполнимыхъ операцій получить такое разложеніе этого многочлена, которое въ занимающемъ насъ вопросѣ вполнѣ замѣняетъ разложеніе на неприводимые множители и позволяетъ прямо примѣнять формулы, полученныя въ предыдущемъ случаѣ.

§ I Основанія способа Ліувилля (Journ. École Polyt. Cah. 22. 1833: Second Mém.—Sect. 1-ère) заключаются въ слѣдующемъ. Если дано уравненіе.

$$(1) \qquad P_0\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} + P_1\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-2}} + \ldots + P_{\mu-1}\frac{dy}{dx} + P_{\mu}y = T$$

гдѣ $P_0, P_1, \ldots P_{\mu}, T$ суть цѣлые многочлены отъ x (къ такому приводится случай раціональныхъ коэффиціентовъ умноженіемъ на общаго знаменателя), то найти цѣлыя функціи $y = Ax^m + \ldots + D$, ему удовлетворяющія, не представляетъ затрудненій. — стоитъ подставить это выраженіе въ (1) и опредѣлить неопредѣленныя пока величины, такъ чтобы получить тожество; если уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія, это возможно, если не имѣетъ,—не возможно. Такимъ образомъ дѣло сводится къ пріемамъ нахожденія дробныхъ рѣшеній вида

$$y = \frac{X}{Y} \qquad (2)$$

гдѣ X и Y суть цѣлые многочлены. Въ § II (стр. 155—162) Ліувилль разбираетъ подробно случай $\mu=1$, въ § III (стр. 163—170) случай $\mu=2$ и лишь въ § IV даетъ общія указанія относительно случая μ—какого-либо (цѣлаго). Въ виду того, что по нашему мнѣнію это предоставленіе читателю выводить общія заключенія изъ разобранныхъ частныхъ случаевъ и подало поводъ къ нападкамъ Пуассона, мы будемъ держаться какъ разъ противоположнаго пріема и обратимся прямо къ уравненію (1) въ общемъ видѣ. При этомъ мы избѣжимъ и лишнихъ повтореній. Ліувилль доказываетъ (l. c. n⁰ 14 p. 171), что *всякій линейный множитель* многочлена Y—знаменателя дробнаго интеграла (2) уравненія (1) долженъ быть дѣлителемъ *коэффиціента при высшей производной y въ (1)*,—это безъ труда обнаруживается при подстановкѣ вмѣсто y въ (1) величины $\frac{X'}{Z(x+a)^\alpha}$: по умноженіи на $Z^{\mu-1}(x+a)^\alpha$ всѣ члены будутъ цѣлыми, кромѣ члена

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)PZ^\mu X}{x+a}$$

получаемаго дифференцированіемъ μ разъ множителя $\frac{1}{(x+a)^\alpha}$, и содержащаго X и Z—не дѣлящіяся на $x+a$; поэтому членъ этотъ долженъ быть цѣлымъ, т. е. P должно дѣлится на $x+a$. Поэтому если извѣстно разложеніе P на линейные множители:

$$P=(x+a)^{\varepsilon}(x+b)^{\varepsilon_1}\ldots(x+c)^{\varepsilon_k}$$

то можемъ положить

$$y=\frac{X}{(x+a)^\alpha(x+b)^\beta\ldots(x+c)^\gamma},$$

гдѣ $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ суть цѣлыя числа—положительныя, 0 или отрицательныя,—послѣднее является, когда въ числитель входятъ множителями нѣкоторые линейные множители P, благодаря этому понижается степень X, что облегчаетъ вычисленіе неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.—Если числа α, β, γ опредѣлимъ, то стоитъ затѣмъ ввести вм. y новое зависимое перемѣнное Z, такъ чтобы

$$y = \frac{Z}{(x+a)^\alpha (x+b)^\beta \ldots (x+c)^\gamma},$$

и вопросъ сводится на нахожденіе цѣлыхъ рѣшеній новаго уравненія. Или просто стоитъ подставить

$$y = \frac{Ax^m + \ldots + Cx + D}{(x+a)^\alpha (x+b)^\beta \ldots (x+c)^\gamma}$$

и подобрать $A, B \ldots C, D$ такъ чтобы (1) обратилось въ тожество, и задача будетъ разрѣшена вполнѣ.

Самый способъ опредѣленія $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ заключается въ слѣдующемъ. Мы подставляемъ въ (1) сначала

$$y = \frac{X}{Z(x+a)^\alpha}$$

гдѣ X и Z многочлены, не дѣлящіеся на $x+a$. Мы находимъ послѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Z(x+a)^\alpha} + \frac{X_1}{Z^2(x+a)^\alpha}, \text{ гдѣ } X_1 = X'Z - Z'X,$$

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{\alpha(\alpha+1)X}{Z(x+a)^{\alpha+2}} - \frac{2\alpha X_1}{Z^2(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{X_2}{Z^4(x+a)^\alpha},$$

$$\text{гдѣ } X_2 = X_1 Z - 2Z, X_1 \text{ и т. д.}$$

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)X}{Z(x+a)^{\alpha+\mu}} + \frac{(-1)^{\mu-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-2)X_1}{Z^2(x+a)^{\alpha+\mu-1}} +$$

$$\ldots + \frac{X_\mu}{Z^{\mu+1}(x+a)^{\alpha+\mu-1}}$$

$$\text{гдѣ } X_\mu = X'_{\mu-1} Z - \mu Z' X_{\mu-1}$$