ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОДНОЙ ФУНКЦІИ

ПЕРВАГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ И ВТОРАГО ПОРЯДКА СЪ ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

Кандидата П. С. Назимова.

(Сочиненіе, удостоенное преміи Заслуженнаго Профессора Брашмана на Университетскомъ актѣ 12-го января 1880 г.)

Изданіе Императорскаго Московскаго Университета.

Москва. 1880. Въ Университетской типографіи (М. Катковъ), на Страстномъ бульварѣ.

Краткій историческій очеркъ.

Первую задачу, относящуюся до уравненій съ частными производными, рѣшилъ еще въ 1734 году Эйлеръ. Въ позднѣйшихъ своихъ сочиненіяхъ онъ изслѣдовалъ не только уравненія 1-го порядка, но и высшихъ, такъ что одинъ изъ методовъ рѣшенія линейныхъ уравненій 2-го порядка носитъ его имя. Этотъ методъ впослѣдствіи былъ усовершенствованъ Лапласомъ, и въ такомъ видѣ онъ приводится въ сочиненіи Грэндоржа. Этотъ способъ примѣняется къ уравненіямъ вида

$$R\frac{d^2z}{dx^2}+S\frac{d^2z}{dxdy}+T\frac{d^2z}{dy^2}+P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}+Nz+M=0,$$

гдѣ R, S, T, P, Q, N и M — нѣкоторыя функціи x и y. Онъ состоитъ въ замѣнѣ перемѣнныхъ x и y двумя другими u и v такимъ образомъ, что двѣ производныя втораго порядка $\frac{d^2z}{du^2}$ и $\frac{d^2z}{dv^2}$ уничтожаются, и остается только производная $\frac{d^2z}{dudv}$. Въ частномъ случаѣ, когда въ первоначальномъ уравненіи одна изъ производныхъ 2-го порядка не входитъ, получается уравненіе другой формы. Преобразованное такимъ образомъ уравненіе Лапласъ или интегрируетъ непосредственно (въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты этого уравненія удовлетворяютъ извѣстному условію), или дѣлаетъ надъ этимъ уравненіемъ преобразованія до тѣхъ поръ, пока преобразованное уравненіе можно будетъ интегрировать, или выяснится невозможность интегрированія.

Одновременно съ Эйлеромъ занимался вопросами, относящимися до уравненій съ частными производными д'Аламберъ, который дока-

залъ, что интегралы такихъ уравненій содержатъ произвольныя функціи, и указалъ способъ опредѣлить число этихъ произвольныхъ функцій для уравненій различныхъ порядковъ.

Но всѣ эти изслѣдованія были очень отрывочны, и къ 1772 году, когда этимъ вопросомъ сталъ заниматься Лагранжъ, вполнѣ были изслѣдованы только линейныя уравненія перваго порядка съ двумя независимыми перемѣнными. Лагранжъ далъ способъ рѣшенія линейныхъ уравненій 1-го порядка со сколькими угодно независимыми перемѣнными.

Къ этому же времени относятся столь извѣстныя изслѣдованія Монжа объ уравненіяхъ втораго порядка, линейныхъ относительно производныхъ втораго порядка. Эти изслѣдованія были вызваны задачею о наименьшихъ поверхностяхъ. Монжъ интеграцію уравненій 2-го порядка съ двумя независимыми перемѣнными замѣняетъ интеграціею трехъ уравненій съ полными дифференціалами; изъ этихъ трехъ уравненій два онъ называетъ характеристическими; третье же $dz=pdx+qdy$. Такихъ системъ изъ 3 уравненій—двѣ. Изъ этихъ Монжевыхъ уравненій обыкновенно нельзя составить такое дифференціальное уравненіе, которое интегрировалось бы обычными пріемами, употребляемыми для интеграціи уравненій съ полными дифференціалами. Но иногда можно составить изъ характеристическихъ уравненій и изъ $dz=pdx+qdy$ одно интегрируемое уравненіе, иногда—два; а иногда для каждой системы можно составить по два интегрируемыхъ уравненія. Вотъ этотъ послѣдній случай и разсматривалъ Монжъ.

Тою же задачею о наименьшихъ поверхностяхъ занимался Лежандръ, который по поводу этой задачи далъ первый методъ своей рѣшенія уравненій втораго порядка. Посредствомъ этого метода можно интегрировать уравненія вида $r+Ss+Tt+Pp+Qq+Nz=0$, гдѣ S, T, P, Q и N—извѣстныя функціи x и y, z—неизвѣстная функція x и y, p и q—частныя производныя 1-го порядка, r, s и t—частныя производныя втораго порядка. Лежандръ замѣняетъ это уравненіе двумя уравненіями 1-го порядка съ двумя функціями: искомою z и вспомогательною z'. Если одно уравненіе случайно содержитъ только вспомогательную функцію z', то ее можно найти, и тогда z найдется изъ другаго уравненія. Если же оба уравненія содержатъ какъ z, такъ и z', то предпринимается рядъ преобразованій даннаго уравненія до тѣхъ поръ, пока или получится уравненіе, содержащее только одну функцію, или выяснится невозможность интеграціи по методу Лежандра.

Лежандру же принадлежитъ другой способъ интеграціи уравненія вида $Rr+Ss+Tt=0$, гдѣ R, S и T—функціи только p и q, т. е. первыхъ производныхъ. Способъ состоитъ въ томъ, что данное уравненіе замѣняется другимъ такого же вида, но въ которомъ R, S и T будутъ уже функціи независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Если извѣстенъ интегралъ втораго уравненія, то изъ него посредствомъ простыхъ вычисленій получится интегралъ перваго.

Мнѣ кажется, что тѣ же формулы Лежандра могутъ быть примѣнены для преобразованія уравненія $Rr+Ss+Tt=0$, въ которомъ R, S и T функціи x и y, въ другое уравненіе, въ которомъ R, S и T функціи p и q. Въ самомъ дѣлѣ Лежандръ замѣняетъ z другою функціею u, опредѣляемою уравненіемъ $u=px+qy-z$. Изъ этого уравненія имѣю $du=xdp+ydq$. Слѣдовательно

$$x=\frac{du}{dp},\ y=\frac{du}{dq}.$$

Дифференцируя эти послѣднія, имѣю:

$$\frac{d^2u}{dp^2}=\frac{dx}{dp},\ \frac{d^2u}{dpdq}=\frac{dx}{dq}=\frac{dy}{dp},\ \frac{d^2u}{dq^2}=\frac{dy}{dq}.$$

Изъ уравненій же $dp=rdx+sdy$ и $dq=sdx+tdy$ легко вывести:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{t}{rt-s^2},\ \frac{dx}{dq}=\frac{dy}{dp}=-\frac{s}{rt-s^2},\ \frac{dy}{dq}=\frac{r}{rt-s^2}.$$

Такимъ образомъ уравненіе

$$R(x,y)r+S(x,y)s+T(x,y)t=0\ldots\ldots(1)$$

можно замѣнить уравненіемъ

$$R\left(\frac{du}{dp},\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2u}{dq^2}-S\left(\frac{du}{dp},\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2u}{dpdq}+T\left(\frac{du}{dp},\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2u}{dp^2}=0\ldots.(2).$$

Между тѣмъ какъ для перваго уравненія способы Монжа и Ампера не всегда дадутъ даже частный интегралъ, уравненіе (2) всегда

разрѣшится методомъ Ампера. Въ самомъ дѣлѣ, одно изъ Монжевыхъ уравненій въ этомъ случаѣ будетъ

$$Rmdp+Tdq=0\ldots\ldots(3),$$

$$\text{гдѣ } Rm=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-TR}.$$

Уравненіе (3) всегда имѣетъ интегралъ, такъ какъ въ него входятъ только p и q. Найдя этотъ частный интегралъ, содержащій одно произвольное постоянное, можно, пользуясь формулами, данными Амперомъ, найти условія, которымъ долженъ удовлетворять всякій интегралъ уравненія (2). Пользуясь этими формулами, надо только найти такой частный интегралъ съ 3 произвольными постоянными, который бы не удовлетворялъ интегралу уравненія (3); тогда исключеніе p и q изъ формулъ

$$u=px+qy-z,\ x=\frac{du}{dp},\ y=\frac{du}{dq}$$

дастъ частный интегралъ съ 3 произвольными постоянными уравненія (1). Методъ Имшенецкаго дастъ формулы, служащія для отысканія общаго интеграла. Частный интегралъ уравненія (2) непремѣнно долженъ быть такой, чтобы p, выведенная изъ него, была функціею не только q, но и x, и y.

Примѣръ.

$$x^2r-2xys+y^2t=0\ldots\ldots(4).$$

Уравненіе (2) для этого примѣра будетъ

$$p^2t+2pqs+q^2r=0\ldots\ldots(5).$$

Изъ уравненія (3) получаю $pq=\alpha$, откуда

$$z=\beta x+\frac{\alpha}{\beta}y+\gamma\ldots\ldots(6).$$

Но пользуясь формулою (6), нельзя найти частный интегралъ (4); для этого надо найти другой частный интегралъ, такой, чтобы p, выведенная изъ него, была бы функціею не только q, но и x, и y. Методъ Ампера для отысканія общаго интеграла даетъ:

$$\frac{d\gamma}{d\beta}+x-\frac{\alpha}{\beta^2}y=0\ldots\ldots(7),$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}+\frac{y}{\beta}=0\ldots\ldots.(8),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}=\frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Послѣднее уравненіе преобразовывается въ слѣдующее:

$$\beta^2\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}-2\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\ldots\ldots(9).$$

Этому уравненію можно удовлетворить, положивъ

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=\frac{a}{\alpha} \text{ и } \frac{d^2\gamma}{d\beta^2}=\frac{2a}{\beta^2}.$$

Слѣдовательно можно положить $\gamma=a(lg\alpha-lg\beta^2)+b\beta+c$. Уравненія (7) и (8) дадутъ:

$$\beta=\frac{a}{b+x},\ \alpha=\frac{-a^2}{y(b+x)} \text{ и } \gamma=alg\left(-\frac{b+x}{y}\right)-\frac{ab}{b+x}+c.$$

Измѣняя нѣсколько значенія постоянныхъ a, b и c, я получаю интегралъ уравненія (5):

$$z=c+alg\frac{b+x}{y}.$$

Для полученія же интеграла уравненія (4) надо исключить p и q изъ уравненій

$$c+alg\frac{b+p}{q}=px+qy-z,\quad x=\frac{a}{b+p} \text{ и } y=-\frac{a}{q}.$$

Это исключеніе даетъ:

$$c+alg\left(-\frac{y}{x}\right)=-bx-z.$$

Изъ этого интеграла способомъ Имшенецкаго получаются формулы для опредѣленія общаго интеграла уравненія (4). Для этого требуется разрѣшить уравненіе

$$\left(\frac{dc}{db}\right)^2\frac{d^2c}{da^2}-4\left(\frac{dc}{db}\right)\frac{d^2c}{dadb}+4\frac{d^2c}{db^2}=0.$$

Въ томъ же мемуарѣ, въ которомъ изложены два предъидущіе способа, Лежандръ даетъ способъ интегрированія нелинейныхъ уравненій вида $r=f(s,t)$. Этотъ способъ состоитъ въ томъ, что интеграція нелинейнаго уравненія приводится къ интеграціи линейнаго, коэффиціенты котораго—функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Этотъ способъ, также какъ и два предъидущіе, примѣняется только въ частныхъ случаяхъ, потому что уравненіе линейное, у котораго коэффиціенты—функціи независимыхъ перемѣнныхъ, не всегда интегрируются съ помощью методовъ Монжа и Ампера.

Къ этому же времени, когда Монжъ и Лежандръ дѣлали изысканія въ области линейныхъ уравненій втораго порядка, относится первая удачная теорія интегрированія нелинейныхъ уравненій 1-го порядка. Въ 1784 году Шарпи, судя по словамъ Грэндоржа, подалъ французской академіи наукъ сочиненіе объ интеграціи уравненій нелинейныхъ 1-го порядка съ двумя независимыми перемѣнными. Методъ состоитъ въ томъ, что подыскивается такое уравненіе, которое опредѣляло бы съ даннымъ такъ p и q, чтобы уравненіе $dz=pdx+qdy$ интегрировалось. При этомъ Шарпи указываетъ на тѣсную связь, существующую между интеграціею нелинейныхъ уравненій съ частными производными, линейныхъ тоже съ частными производными и совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами. Шарпи даже примѣнялъ свой методъ, но неудачно, къ интегрированію нелинейныхъ уравненій со многими неизвѣстными. Это сочиненіе не было напечатано, и вслѣдствіе этого Шарпи долженъ былъ раздѣлить честь открытія съ Лагранжемъ.

Лагранжъ уже въ 1772 и 1774 году показалъ, что интеграція нелинейныхъ уравненій съ двумя независимыми перемѣнными приводится къ интеграціи линейныхъ уравненій съ 4 независимыми перемѣнными. Но еще въ 1785 году онъ объявляетъ о неумѣніи окончить интеграцію; это неумѣніе происходило отъ того, что онъ не зналъ, что интеграція приводится къ уравненіямъ съ полными дифференціалами. Въ концѣ концовъ онъ достигъ полнаго рѣшенія, и его методъ въ окончательной формѣ получилъ большое сходство съ методомъ Шарпи.

Но еще большая заслуга Лагранжа состоитъ въ томъ, что онъ ввелъ понятіе о полномъ интегралѣ, чѣмъ значительно упростилъ задачу. Лагранжъ изобрѣлъ остроумный методъ варіяціи произвольныхъ постоянныхъ. Благодаря этому методу, нахожденіе общаго интеграла замѣнилось нахожденіемъ полнаго интеграла. Лагранжъ примѣнилъ этотъ методъ не только къ уравненіямъ 1-го порядка, но и къ уравненіямъ 2-го порядка; къ уравненіямъ 1-го порядка методъ примѣнялся очень просто, къ уравненіямъ же 2-го порядка не такъ просто. Вслѣдствіе этого Лагранжъ былъ настолько скроменъ, что объявилъ, что его методъ не даетъ полезныхъ результатовъ, а только любопытные результаты въ примѣненіи къ уравненіямъ 2-го порядка. Это его мнѣніе до того укоренилось, что и въ настоящее время, по словамъ Ливенцова, ту же мысль повторяетъ въ своихъ лекціяхъ Бертранъ. Тѣмъ не менѣе, такъ какъ этотъ методъ для большинства уравненій 2-го порядка пока единственный, я счелъ необходимымъ сдѣлать нѣкоторыя развитія его въ главѣ IV этого сочиненія.

За Лагранжемъ слѣдуетъ Пфаффъ, который далъ способъ, вполѣдствіи оставленный вслѣдствіе сложности, рѣшать уравненія со сколькими угодно независимыми перемѣнными 1-го порядка. «Задача Пфаффа» состоитъ въ интегрированіи полнаго дифференціальнаго уравненія

$$U_1du_1+U_2du_2+\ldots+U_ndu_n=0\ldots(A).$$

Пфаффъ даетъ способъ, при n четномъ, привести посредствомъ замѣны перемѣнныхъ данный дифференціалъ къ другому дифференціалу $\zeta(Z_1dz_1+Z_2dz_2+\ldots+Z_{n-1}dz_{n-1})$, гдѣ $Z_1, Z_2\ldots Z_{n-1}$— функціи только $z_1, z_2\ldots z_{n-1}$, а ζ кромѣ того—функція u_n. Для нахожденія новыхъ перемѣнныхъ надо интегрировать систему дифференціальныхъ уравненій съ полными дифференціалами. Такое преобразованіе даетъ ему возможность интегрировать уравненіе (A). Если n нечетное, онъ полагаетъ $u_n = const.$ и приводитъ задачу къ случаю n четнаго. Когда n четное, то онъ данное уравненіе приводитъ къ виду

$$\zeta(Z_1dz_1+Z_2dz_2+Z_3dz_3+\ldots\ldots+Z_{n-1}dz_{n-1})=0$$

и такимъ образомъ уменьшаетъ число перемѣнныхъ. Далѣе онъ полагаетъ $z_{n-1}=$ пост., а предъидущее уравненіе приводитъ къ виду

$$\tau(T_1dt_1+T_2dt_2+T_3dt_3+\ldots+T_{n-3}dt_{n-3})=0.$$

Далѣе полагаетъ $t_{n-3}=$ пост. И такъ далѣе. Въ концѣ концовъ получается уравненіе $X_1dx_1+X_2dx_2=0$, которое интегрируется и даетъ $f(x_1,x_2)=$ пост. Рядъ уравненій $z_{n-1}=$ пост., $t_{n-3}=$ пост. $\ldots\ldots f(x_1,x_2)=$ пост. представляетъ интегральную систему даннаго уравненія, которую можно назвать полнымъ интеграломъ. Изъ этого полнаго интеграла можно получить такъ называемый общій интегралъ. Гауссъ впослѣдствіи далъ другой способъ рѣшенія. Какъ же примѣняется эта «задача Пфаффа» къ интегрированію уравненія съ частными производными? Для этого Пфаффъ разсматриваетъ уравненіе

$$p_1dx+p_2dx_2+\ldots\ldots+p_ndx_n+0.dp_1+\ldots.0.dp_{n-1}+(-1)\ dz=0,$$

гдѣ p_n предполагается опредѣленнымъ изъ даннаго уравненія, и гдѣ $p_1,p_2\ldots p_n$ обозначаютъ частныя производныя отъ функціи z по независимымъ перемѣннымъ $x_1,x_2\ldots x_n$. Въ этомъ уравненіи онъ старается уменьшить число перемѣнныхъ, которыхъ—четное число. Для уменьшенія надо рѣшить вполнѣ систему уравненій, рѣшаемыхъ вполнѣ же въ методѣ Коши, и для которой ищутъ только одинъ интегралъ въ методѣ Якоби. Уменьшивъ число перемѣнныхъ, одно новое перемѣнное приравниваютъ постоянному. Далѣе интегрируютъ новую систему и повторяютъ аналогичныя вычисленія n разъ. Въ результатѣ получаемъ n уравненій съ n постоянными, изъ которыхъ исключаютъ $p_1,p_2\ldots p_{n-1}$ и получаютъ полный интегралъ. Изъ этого краткаго и, боюсь, не вполнѣ яснаго изложенія способа Пфаффа видно все его несовершенство: во 1) приходится n разъ вполнѣ интегрировать различныя системы обыкновенныхъ уравненій, во 2) изъ этихъ системъ только первую можно изобразить общею формулою, а остальныя придется вычислить для каждаго примѣра отдѣльно. Число интеграцій въ этомъ методѣ почти вдвое болѣе, чѣмъ въ методѣ Якоби.

Къ тому же времени, когда Пфаффъ дѣлалъ свои открытія, относятся работы Ампера; эти работы относятся къ теоріи уравненій 2-го порядка. Но такъ какъ я желаю, чтобы мой очеркъ былъ по возможности яснѣе, то я позволю себѣ при дальнѣйшемъ изложеніи отступить отъ хронологическаго порядка, и сначала разскажу, какъ усовершенствовалась теорія уравненій перваго порядка, а потомъ уже объ усовершенствованіи теоріи уравненій 2-го порядка.

Въ 1819 году Коши открылъ новый методъ интеграціи нелинейныхъ уравненій 1-го порядка со сколькими угодно независимыми перемѣнными; его изслѣдованія не были напечатаны, а литографированы, почему и были неизвѣстны до 1834 года. Одинъ изъ принциповъ этого метода, замѣна перемѣнныхъ $x_1,x_2,x_3 \ldots . x_n$ другими $x_{10},x_{20},x_{30} \ldots . x_{n-1,0}x_n$, былъ навѣянъ работами Ампера относительно интеграціи билинейнаго уравненія. Но другой принципъ, не менѣе важный чѣмъ первый, всецѣло принадлежитъ Коши: это принципъ замѣны даннаго уравненія дифференціаломъ его. Что эти два принципа должно отдѣлять, видно изъ работъ новѣйшихъ математиковъ (напр. Давидова, Петерсона), которые посредствомъ сочетанія обоихъ принциповъ даютъ для уравненій 2-го порядка съ 2 перемѣнными формулы, отличныя отъ формулъ Ампера; причемъ методъ Ампера и для билинейныхъ, и для нелинейныхъ уравненій можетъ не давать рѣшенія, между тѣмъ какъ методы новыхъ математиковъ дадутъ рѣшеніе, и на оборотъ. Я не стану описывать методъ Коши, который излагается даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ (Serret, Souchon, Lacroix). Не стану также излагать то знаменитое исключеніе, которое казалось подрывало общность разсужденій Коши, и которое было разсмотрѣно Серре, доказавшимъ, что въ случаѣ этого исключенія интегралъ даннаго уравненія въ общемъ его видѣ есть полный интегралъ (это изслѣдованіе помѣщено въ учебникѣ Серре). Упомяну только, что есть другой кажущійся случай исключенія: это тотъ случай, когда данное уравненіе полулинейно (замѣчу, что не всегда полулинейность вызываетъ кажущееся исключеніе). Въ этомъ случаѣ обычный методъ не даетъ полнаго интеграла. Для этого случая Дарбу и Майеръ даютъ очень простой пріемъ нахожденія полнаго интеграла. Разница въ томъ, что въ способѣ Коши постоянныя, входящія въ полный интегралъ,

суть первоначальныя значенія перемѣнныхъ и функціи z; въ способѣ же Майера постоянными берутся начальныя величины производныхъ перваго порядка $p_1,p_2 \ldots . p_{n-1}$; эти начальныя величины я обозначаю черезъ $p_{10},p_{20} \ldots . p_{n-1,0}$. Этотъ способъ—прямое слѣдствіе изслѣдованій Коши, если только ихъ излагать въ той болѣе общей формѣ, въ какой они изложены въ сочиненіи Мансіона; такое изложеніе основано на одной замѣткѣ самого Коши. Методъ Коши требуетъ $2n—1$ интеграцій, гдѣ n число независимыхъ перемѣнныхъ. Но надо сознаться, что интегралы сложны, сложнѣе тѣхъ, которые получаются по общеупотребительному методу Якоби. Кромѣ того къ этому присоединяется неудобство практическое, состоящее въ необходимости исключить $p_{10},p_{20},p_{30} \ldots p_{n-1,0}$. На мой взглядъ главное достоинство этого метода—его теоретическая сторона; воззрѣнія, на которыхъ онъ основанъ, при примѣненіи къ уравненіямъ высшаго порядка, разрѣшаютъ и этотъ вопросъ, хотя и не вполнѣ.

Важное мѣсто въ исторіи интеграціи уравненій 1-го порядка занимаютъ изслѣдованія Якоби, который далъ два различные метода.

Еще въ 1827 году онъ обнародовалъ способъ, очень сходный со способомъ Пфаффа, но который имѣетъ точкою исхода условія интегрируемости уравненія $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots . + p_n dx_n$. Вслѣдъ затѣмъ въ 1836 году онъ обнародовалъ усовершенствованный методъ Пфаффа. На окончательное же усовершенствованіе Якоби былъ наведенъ работами Гамильтона, относящимися къ интеграціи уравненій динамики. Исторія этого вопроса изложена въ сочиненіи Грэндоржа: Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique. Въ механикѣ, какъ извѣстно, постоянныя интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія обыкновенно суть начальныя значенія координатъ, или начальныя скорости. Якоби возъимѣлъ мысль: новыми перемѣнными, которыми замѣняются $x_2,x_3 \ldots . x_n$, $z, p_1,p_2 \ldots . p_{n-1}$ въ уравненіи Пфаффа

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n + 0 . dp_1 + \ldots . + 0 . dp_{n-1} - dz = 0,$$

выбрать начальныя значенія $p_1,p_2 \ldots . p_{n-1}$, $x_2,x_3 \ldots . x_n$, z, которыя вмѣстѣ съ тѣмъ—постоянныя при интеграціи совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами. Это даетъ возможность ограничится интеграціею первой системы Пфаффа. Такимъ образомъ въ этомъ методѣ интегрируются вполнѣ тѣ же совмѣстныя уравненія, что и въ методѣ Коши. Различіе состоитъ: 1) въ выводѣ формулъ, и 2) въ томъ, что у Коши изъ интеграловъ опредѣляются $z, x_2, x_3 \ldots x_n$ какъ функціи x_1 и постоянныхъ и исключаются постоянныя $p_{10}, p_{20} \ldots p_{n-1,0}$; въ методѣ же Якоби опредѣляются $x_{20}, x_{30} \ldots x_{n0}, z_0$ какъ функціи $z, x_1, x_2 \ldots x_n$, $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ и исключаются $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$.

Но болѣе извѣстенъ другой методъ Якоби, который отличается замѣчательною удобопримѣнимостью на практикѣ. Этотъ методъ впервые былъ опубликованъ Клебшемъ въ LX томѣ Креллева журнала въ 1862 году; но Якоби уже обладалъ имъ въ 1838 году. Этотъ методъ еще прежде 1862 года самостоятельно открытъ Ліувилемъ, Буромъ и Донкиномъ. Методъ этотъ имѣетъ то преимущество, что даетъ большую возможность выбора путей для рѣшенія задачи. Но съ другой стороны онъ требуетъ въ общемъ случаѣ бо̀льшаго числа интеграцій, чѣмъ методъ Коши, а именно $\frac{n(n-1)}{2}+1$ интеграцій. Но это только въ самомъ невыгодномъ случаѣ; въ примѣненіи же метода къ примѣрамъ очень часто число интеграцій уменьшается. Есть даже нѣсколько общихъ случаевъ, разобранныхъ Мансіономъ на страницахъ 155—161, когда методъ Якоби упрощается (напр. случай, когда перемѣнныя раздѣлены). Мансіонъ забылъ только одинъ, самый обширный однако же, случай.

Первая система, которую интегрируютъ въ методѣ Якоби, тождественна съ системою, интегрируемою вполнѣ въ методѣ Коши. Въ методѣ же Якоби ищутъ только 1 интегралъ этой системы, отличающійся отъ даннаго уравненія. Но можетъ случиться, что легко найти еще нѣсколько интеграловъ, содержащихъ производныя. Если теперь эти интегралы $\varphi_1 = a_1$, $\varphi_2 = a_2 \ldots \varphi_m = a_m$ и данное уравненіе $\varphi_0 = 0$, гдѣ $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_m$ обозначаютъ функціи $x_1, x_2 \ldots x_n$, $p_1, p_2 \ldots p_n$ (заимствую всѣ обозначенія со страницы 12 Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique, Graindorge, на которой приведена аналогичная теорема для уравненій динамики), обращаютъ символы Пуассона въ нули, такъ что $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ для всякихъ значеній i и k отъ 0 до m; то такіе интегралы можно всѣ взять для опредѣленія производныхъ $p_1, p_2, p_3 \ldots$ и p_n, и вмѣсто

того, чтобы интегрировать постепенно 2-ю, 3-ю и т. д. системы Якоби, прямо перейти къ отысканію интеграла для $m+1$-й системы. Но еще болѣе: если встрѣтится при интеграціи того уравненія, которымъ заключается нахожденіе интеграла общаго, напримѣръ, p-ой системы, такой случай, что нѣсколько интеграловъ этого уравненія $\varphi_1 = a_1$, $\varphi_2 = a_2 \ldots \ldots \varphi_k = a_k$ обращаютъ въ нули символы Пуассона $(\varphi_i, \varphi_l) = 0$ (гдѣ и i, и l имѣютъ всѣ значенія отъ 1 до k); то, такъ какъ уже и безъ того символы, составленные изъ какого-нибудь φ и какого-либо изъ интеграловъ прежнихъ $p-1$ системъ, равны нулю, всѣ эти рѣшенія $\varphi_1 = a_1$, $\varphi_2 = a_2 \ldots \varphi_k = a_k$ можно принять для опредѣленія $p_1, p_2 \ldots p_n$, и, если они отличны отъ интеграловъ прежнихъ системъ, переходить прямо къ интеграціи $p+k+1$-ой системы.

Есть нѣкоторые случаи, когда на первый взглядъ видна возможность такой интеграціи; къ такимъ случаямъ относятся всѣ примѣры, приведенные въ сочиненіяхъ Мансіона и Грэндоржа. Такъ въ случаѣ, когда уравненіе, разрѣшенное относительно p_n, линейно относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots x_{n-1}$, есть возможность найти всѣ $n-1$ интеграла для опредѣленія $p_1, p_2 \ldots p_n$ интеграціею 1-й системы. Въ самомъ дѣлѣ въ такомъ случаѣ производныя относительно $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ зависятъ только отъ $x_n, p_1, p_2, p_3 \ldots p_{n-1}$, и, такъ какъ при примѣненіи метода Якоби z въ уравненіи уничтожено, то, взявъ тѣ $n-1$ дифференціальныхъ уравненій, въ которыя входятъ дифференціалы $dx_n, dp_1, dp_2 \ldots dp_{n-1}$, я могу получить $n-1$ интеграловъ, которые будутъ только функціями $x_n, p_1, p_2 \ldots \ldots p_{n-1}$; слѣдовательно символы, которые равны

$$\sum_{l=1}^{l=n-1}\left(\frac{d\varphi_i}{dp_l}\frac{d\varphi_k}{dx_l}-\frac{d\varphi_i}{dx_l}\cdot\frac{d\varphi_k}{dp_l}\right),$$

будутъ $= 0$. Къ такимъ уравненіямъ принадлежитъ примѣръ, приведенный Мансіономъ на страницѣ 169. Подобное же будетъ, если можно найти такіе интегралы, изъ которыхъ каждый содержалъ такіе иксы, которые соотвѣтствуютъ производнымъ, не входящимъ въ другія уравненія.

Очень важнымъ шагомъ впередъ была теорія Бура интеграціи совмѣстныхъ уравненій 1-го порядка съ одною функціею. Теорія состоитъ въ томъ, что на данныя m совмѣстныхъ уравненій смотрятъ, какъ на интегралы $m-1$ первыхъ системъ Якоби, и потому продолжаютъ интеграцію, начиная съ m-ой системы; въ результатѣ получается полный интегралъ съ $n-m+1$ постоянными. Впрочемъ такая интеграція будетъ немедленно приложима только въ томъ случаѣ, когда всѣ m уравненій обращаютъ $\frac{m(m-1)}{2}$ символа Пуассона въ нули. Если же этого нѣтъ, то символы Пуассона, не обращающіеся въ нули, причисляются къ даннымъ уравненіямъ, и тогда общій интегралъ имѣетъ меньшее, чѣмъ упомянуто, число постоянныхъ. Можетъ случиться, что нѣкоторые символы равны постоянному или функціи только иксовъ, или что число всѣхъ уравненій, данныхъ и прибавочныхъ, превышаетъ n; во всѣхъ этихъ случаяхъ данныя уравненія не имѣютъ общаго интеграла.

Недостатокъ метода Якоби—большое число интеграцій—былъ устраненъ слѣдовавшими за нимъ геометрами, причемъ эти упрощенія являлись вслѣдствіе изученія совмѣстныхъ уравненій съ частными производными одной функціи. Сначала Клебшъ даетъ способъ интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій (т. е. уравненій, обращающихъ попарно символы Пуассона въ нули), и этотъ способъ Вейлеръ прилагаетъ къ интеграціи системъ линейныхъ уравненій Якоби; при этомъ число интеграцій сводится къ $2n-4$. Потомъ Майеръ, изслѣдуя вопросъ объ интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, примѣняетъ свой методъ къ системамъ Якоби и интегрируетъ ихъ n интеграціями (1872 годъ). Способу Майера предшествовалъ способъ Буля интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій. Этотъ способъ Буля, а также изслѣдованія Натани и Дюбуа-Рэймона облегчили Майеру созданіе его теоріи. Теорія эта очень замѣчательна; въ ней двѣ главныя идеи: 1) всякой системѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными одной функціи соотвѣтствуетъ система уравненій съ полными дифференціалами, и интеграція первой системы зависитъ отъ нахожденія интегральной системы второй; и на оборотъ всѣ частные интегралы первой составляютъ интегральную систему второй; 2) замѣна прежнихъ постоянныхъ новыми

такимъ образомъ, что при интеграціи системы уравненій съ полными дифференціалами можно опустить всѣ дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ, кромѣ одного. Всѣ эти методы, уменьшая число интеграцій, вводятъ другое осложненіе, именно измѣненіе перемѣнныхъ, и кромѣ того уменьшаютъ свободу выбора путей для рѣшенія задачи. Поэтому иногда придется предпочесть методъ Якоби, особенно въ случаяхъ, когда онъ допускаетъ упрощенія. Такимъ образомъ была усовершенствована теорія интеграціи совмѣстныхъ линейныхъ уравненій.

Для интеграціи же совмѣстныхъ нелинейныхъ уравненій до 1869 года былъ извѣстенъ одинъ только методъ Бура. Въ 1869 году въ Comptes rendus de l'Académie de Paris былъ напечатанъ методъ Коркина интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ нелинейныхъ уравненій 1-го порядка. Онъ состоитъ въ томъ, что рѣшаютъ одно уравненіе и получаютъ полный интегралъ съ n произвольными постоянными; эти произвольныя постоянныя опредѣляются такъ, чтобы второе изъ данныхъ уравненій удовлетворялось. Новыя постоянныя опредѣляются условіемъ, чтобы третье удовлетворялось, и т. д., и т. д.

Наконецъ Ли предпринялъ рядъ изслѣдованій, главнѣйшимъ результатомъ которыхъ была новая теорія интеграціи совмѣстныхъ нелинейныхъ уравненій. Эта теорія до такой степени аналогична теоріи Майера, что самъ Ли въ одномъ мемуарѣ указалъ на то, что теорія Майера есть слѣдствіе его теоріи. Гораздо однако же проще разсматривать теорію Ли, какъ слѣдствіе теоріи Майера. Такъ какъ вообще эта теорія изложена у Мансіона слишкомъ сложно и неясно, то я счелъ полезнымъ изложить въ этомъ сочиненіи теорію Ли, какъ слѣдствіе теоріи Майера, а также развилъ подробнѣе вопросъ о примѣненіи метода Ли къ интеграціи одного уравненія, вопросъ, о которомъ Мансіонъ говоритъ очень неясно нѣсколько строчекъ. Мансіонъ говоритъ въ введеніи: Combinée (т. е. методъ Ли) avec celle de Jacobi, elle s'applique à une seule équation à $n+1$ variables, surtout dans les cas les plus défavorables. Потомъ на страницѣ 265 излагаетъ очень кратко, какимъ образомъ Ли интегрируетъ одно уравненіе; но это изложеніе несогласно съ только что приведенными словами изъ введенія, такъ какъ въ немъ ничего не говорится о комбинаціи метода Ли съ методомъ Якоби, а только о комбинаціи метода Якоби съ методомъ Коши.

На мой взглядъ такая комбинація метода Якоби съ методомъ Коши была бы вѣрна только въ томъ случаѣ, когда послѣ рѣшенія каждой системы Якоби данное уравненіе не преобразовывалось бы замѣною одной производной нѣкоторою функціею другихъ производныхъ и перемѣнныхъ, т. е. въ методѣ не упрощенномъ, который излагается у Грэндоржа въ 6 главѣ. Для разъясненія моей мысли разсмотрю, какъ прилагаются слова Мансіона къ первой системѣ Якоби. Пусть

$$p_1 = f_1(p_2, p_3 \dots p_n,\ x_1, x_2 \dots x_n) \dots\dots (10)$$

—данное уравненіе, не содержащее z явно. Тогда интеграція по методу Коши состоитъ въ нахожденіи $2n-1$ интеграловъ слѣдующей системы:

$$dx_1 = -\,dx_l : \frac{df_1}{dp_l} = dp_l : \frac{df_1}{dx_l} = dz : \left(p_1 - \sum p_l \frac{df_1}{dp_l}\right) \dots\dots (11),$$

гдѣ l имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до n. Въ методѣ Якоби ищутъ только одинъ интегралъ уравненій (11) или интегралъ уравненія

$$\frac{d\psi}{dx_1} + \sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_1}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_1}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) = 0 \dots\dots (12);$$

пусть изъ этого интеграла получится

$$p_2 = f_2(p_3, p_4 \dots p_n,\ x_1, x_2 \dots x_n).$$

Пусть при замѣнѣ p_2 черезъ f_2 вмѣсто (10) получается $p_1 = f^{\times}{}_1$. Далѣе ищутъ интегралъ общій двумъ линейнымъ уравненіямъ:

$$\left(p_1 - f^{\times}{}_1, \psi\right) = \Big/^{p_2=f_2}\left\{\frac{d\psi}{dx_1} + \sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_1}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_1}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{df_1}{dp_2}\sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_2}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_2}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) = 0 \dots\dots (13)\right.$$

$$\text{и } \left(p_2 - f_2, \psi\right) = \frac{d\psi}{dx_2} + \sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_2}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_2}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) = 0 \dots\dots (14).$$

Для этого ищутъ одинъ интегралъ системы совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами:

$$dx_1 = dx_2 : 0 = -dx_l : \Big/^{p_2=f_2}\left(\frac{df_1}{dp_l} + \frac{df_1}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dp_l}\right)$$

$$= dp_l : \Big/^{p_2=f_2}\left(\frac{df_1}{dx_l} + \frac{df_1}{dp_2}\frac{dp_2}{dx_l}\right) \dots\dots (15)$$

Если найденный интегралъ φ_1 не удовлетворяетъ уравненію (14), то въ это уравненіе (14) подставляютъ постепенно функціи

$$\varphi_2 = (p_2 - f_2, \varphi_1),\ \varphi_3 = (p_2 - f_2, \varphi_2),\ \varphi_4 = (p_2 - f_2, \varphi_3) \dots\dots$$

Всѣ эти функціи φ_2, φ_3, $\varphi_4 \dots\dots$ суть интегралы уравненія (13) и системы (15). Пусть такихъ интеграловъ $2n-4$; всѣ эти интегралы не удовлетворяютъ (14). Тогда, говоритъ Мансіонъ, можно, пользуясь этими интегралами, докончить интеграцію методомъ Коши. Но простое сравненіе системы (15) съ системою (11) показываетъ, что интегралъ системы (15) не всегда будетъ интеграломъ системы (11), или не всякій интегралъ (13) будетъ интеграломъ (12). Можно только сказать, что всякій интегралъ (15), удовлетворяющій линейному уравненію (14), удовлетворяетъ тоже и (12), а слѣдовательно есть интегралъ (11), ибо въ такомъ случаѣ уравненіе (15) принимаетъ на основаніи (14) слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dx_1} + \Big/^{p_2=f_2}\sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_1}{dx_l}\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_1}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) - \Big/^{p_2=f_2}\frac{df_1}{dp_2}\frac{d\psi}{dx_2} = 0.$$

Послѣднее уравненіе совпадаетъ съ (12), такъ какъ ψ по условію не содержитъ ни p_1, ни p_2, а f_2 содержитъ произвольное постоянное. Понятно, что все сказанное о первой системѣ Якоби распространяется и на другія системы Якоби; только формулы въ такомъ случаѣ будутъ сложнѣе.

Ли еще, по словамъ Мансіона, дѣлаетъ попытки слить методы Коши и Якоби. На сколько эти изслѣдованія помѣщены у Мансіона, я не могу придать имъ большой важности, такъ какъ сліяніе происходитъ на почвѣ безконечностей различныхъ порядковъ, почвѣ очень туманной.

Замѣчательно еще воззрѣніе Ли на происхожденіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными изъ одного уравненія между z, перемѣнными и произвольными постоянными, въ случаѣ нелинейнаго уравненія,—изъ n уравненій въ случаѣ линейнаго (n—число перемѣнныхъ),—и изъ нѣсколькихъ уравненій, число которыхъ менѣе числа независимыхъ перемѣнныхъ, въ случаѣ полулинейности.

Перейду теперь къ исторіи интеграціи уравненій 2-го порядка. Исторія эта очень кратка. Въ началѣ нынѣшняго столѣтія Амперъ далъ рѣшеніе билинейнаго уравненія, т. е. уравненія вида $Hr+2Ks+Lt+N(rt-s^2)+M=0$, гдѣ r, s и t—производныя 2-го порядка, H, K, L, N и M—функціи x, y, z и производныхъ перваго порядка p и q; при этомъ онъ высказалъ ту мысль, что интеграція Монжевыхъ уравненій, а также тѣхъ уравненій, которыя онъ далъ для рѣшенія билинейнаго уравненія, состоитъ въ составленіи изъ этихъ уравненій (посредствомъ умноженія ихъ на неопредѣленные множители и сложенія) такого уравненія, первая часть котораго полный дифференціалъ. Онъ же далъ методъ отысканія общаго интеграла по извѣстному частному интегралу съ тремя произвольными постоянными для линейныхъ уравненій въ томъ случаѣ, когда можно найти частный интегралъ Монжевыхъ уравненій. Въ такомъ случаѣ нахожденіе общаго интеграла зависитъ отъ разрѣшенія уравненія 2-го порядка, которое вообще не интегрируется методомъ Ампера. Первую теорію Амперъ распространилъ и на уравненія нелинейныя.

Въ послѣдствіи Морганъ въ 1856 году и Буръ въ 1862 году усовершенствовали методъ Ампера, приведя нахожденіе частнаго интеграла (или, если возможно, и общаго интеграла) къ рѣшенію двухъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій перваго порядка, что было особенно значительнымъ облегченіемъ до появленія теоріи Майера, о которой я уже говорилъ прежде. Формулы обоихъ совпадаютъ; но выводы ихъ различны: у Бура два линейныя

уравненія являются, какъ условія, которымъ должна удовлетворять нѣкоторая функція, чтобы ея дифференціалъ могъ составиться изъ совмѣстныхъ уравненій Монжа, или Ампера. Морганъ выводитъ тѣ же уравненія, отыскивая условія, необходимыя для того, чтобы данное билинейное уравненіе имѣло промежуточный интегралъ, содержащій одну произвольную функцію въ одномъ ея видѣ. Около того же времени Буль далъ свое рѣшеніе билинейнаго уравненія, въ которомъ старался быть какъ можно ближе къ методу Монжа.

Наконецъ Имшенецкій въ своемъ сочиненіи, переведенномъ на французскій языкъ въ 1868 году, даетъ способъ находить по частному интегралу, содержащему 3 произвольныхъ постоянныхъ, общій интегралъ билинейнаго уравненія. Вопросъ приводится къ рѣшенію другаго уравненія втораго порядка, но уже линейнаго. Его методъ не требуетъ, чтобы частный интегралъ былъ полученъ методомъ Ампера. При выводѣ уравненія 2-го порядка, отъ котораго зависитъ нахожденіе общаго интеграла, Имшенецкій пользовался строкою Тэйлора, которая въ разсматриваемомъ имъ случаѣ прекращалась на членахъ, содержащихъ вторыя степени тѣхъ разностей, относительно которыхъ развита строка (разности прежнихъ значеній производныхъ вторыхъ порядковъ и тѣхъ значеній, которыя получатся изъ общаго интеграла). Вслѣдствіе этого методъ вообще не будетъ примѣнимъ къ уравненіямъ нелинейнымъ, хотя строку Тэйлора, соотвѣтствующую каждому случаю, можно легко найти. Такимъ образомъ въ случаѣ нелинейнаго уравненія придется для отысканія общаго интеграла прибѣгать къ методу Лагранжа.

Рѣшеніемъ уравненій нелинейныхъ 2-го порядка, а также и высшихъ порядковъ, въ послѣднее время съ особымъ стараніемъ занимались русскіе математики. Сначала А. Ю. Давидовъ, примѣняя методъ Коши къ уравненіямъ высшихъ порядковъ, далъ уравненія, помѣченныя въ 5-й главѣ этого сочиненія номеромъ (27), а также въ нѣсколько иной формѣ уравненія (29) и (29^{bis}), на которыя онъ смотритъ только, какъ на условія интегрируемости. Это изслѣдованіе помѣщено въ первомъ томѣ «Математическаго Сборника». По словамъ Преображенскаго, одновременно съ Давидовымъ такія же изслѣдованія были произведены германскимъ ученымъ Дюбуа-Рэймономъ. Въ седьмомъ томѣ «Математическаго Сборника» помѣщены изслѣдованія Преображенскаго и Сонина, которые предлагаютъ въ случаѣ невозможности найти интегралы втораго порядка (т. е. интегралы, посредствомъ которыхъ интегрируютъ Давидовъ и Дюбуа-Рэймонъ, и которые я называю дополняющими) искать интегралы высшихъ порядковъ. Мнѣ кажется, что это очень частный способъ. Невозможность найти интегралы втораго порядка происходитъ вслѣдствіе того, что уравненія, помѣченныя мною во второй главѣ номерами 25^{bis} и 26^{bis} (впервые, какъ кажется, встрѣчаемые у Сонина), Сонинъ разсматриваетъ только въ случаѣ ихъ тождественности. Наконецъ въ 8-омъ томѣ «Математическаго Сборника» Петерсонъ интегрируетъ съ помощью уравненій, помѣченныхъ въ 5-й главѣ номеромъ (27), перемѣняя при интеграціи независимыя перемѣнныя. Наконецъ есть два метода—Монжа и Лежандра—для интеграціи уравненій 2-го порядка съ 3 независимыми перемѣнными.

Всѣ вышеупомянутые методы для рѣшенія уравненій 2-го порядка съ двумя независимыми перемѣнными отличаются тѣмъ, что они въ большинствѣ случаевъ не примѣняются. Теорія уравненій съ частными производными 2-го порядка далеко отстала отъ теоріи уравненій 1-го порядка. Во второмъ случаѣ, если нельзя будетъ найти интегралъ, то это или вслѣдствіе неумѣнія найти данную квадратуру, или вслѣдствіе неумѣнія рѣшить предлежащія полныя дифференціальныя уравненія съ 1 независимымъ перемѣннымъ. Въ первомъ же случаѣ невозможность рѣшенія будетъ происходить просто отъ того, что формулы частныя (по крайней мѣрѣ въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы умѣемъ ими пользоваться) и могутъ рѣшать только частные вопросы; это не исключаетъ затрудненій, общихъ съ уравненіями 1-го порядка.

Въ предъидущемъ историческомъ очеркѣ говорилось только объ уравненіяхъ съ частными производными одной функціи; это потому, что изслѣдованій относительно уравненій съ 2-мя и нѣсколькими функціями я не встрѣчалъ, исключая одного мемуара Коши, помѣщеннаго въ его Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, томъ 1, въ которомъ Коши на страницахъ 76—93 говоритъ объ интеграціи совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ функцій; уравненія эти съ постоянными коэффиціентами и какого угодно порядка. Впрочемъ общеизвѣстно

еще, что самое общее рѣшеніе такого уравненія, въ которомъ первая часть есть функціональный опредѣлитель, а вторая нуль, состоитъ въ томъ, что одна изъ функцій равна произвольной функціи всѣхъ остальныхъ.

Дальнѣйшее мое изложеніе будетъ состоять въ слѣдующемъ:

1) Изложеніе метода Ли, какъ онъ вытекаетъ изъ метода Майера.

2) Выводъ формулъ, примѣнимыхъ въ частныхъ случаяхъ для рѣшенія уравненій втораго и высшихъ порядковъ съ двумя независимыми перемѣнными (при этомъ выводѣ я придерживаюсь идей Коши и Ампера).

3) Разборъ метода Лагранжа для отысканія общаго интеграла уравненія 2-го порядка съ 2 независимыми перемѣнными по полному интегралу.

4) Я стараюсь указать, пользуясь формулами, аналогичными формуламъ, употребляемымъ въ методахъ Лагранжа и Якоби для интеграціи уравненій 1-го порядка, причину частности всѣхъ пріемовъ интеграціи уравненій 2-го порядка съ 2 перемѣнными; при этомъ намѣчается путь, какимъ образомъ ощупью дойти до полнаго интеграла въ томъ случаѣ, когда общеупотребительные методы его не даютъ.

ГЛАВА I.

О выводѣ метода Ли для интеграціи нелинейныхъ совмѣстныхъ уравненій изъ метода Майера и о примѣненіи метода Ли къ интеграціи одного уравненія.

Пусть даны вполнѣ совмѣстныя уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = f_1(x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_n, q_1, q_2 \ldots q_n), \\ p_2 = f_2(x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_n, q_1, q_2 \ldots q_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m = f_m(x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_n, q_1, q_2 \ldots q_n). \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Въ этихъ уравненіяхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n$—независимыя перемѣнныя, z—функція этихъ перемѣнныхъ, не входящая явно въ данныя уравненія (что всегда можно сдѣлать, примѣнивъ предварительно преобразованіе Якоби), $p_1, p_2 \ldots p_m$—частныя производныя z по $x_1, x_2 \ldots x_m$, а $q_1, q_2 \ldots q_n$ такія же частныя производныя по $y_1, y_2 \ldots y_n$. Я называю вполнѣ совмѣстными такія уравненія, которыя имѣютъ полный интегралъ съ $n+1$ произвольными постоянными; какъ извѣстно, для этого всѣ $\frac{m(m-1)}{2}$ символы Пуассона должны равняться нулю. Также извѣстно, что въ случаѣ неполной совмѣстности методъ Бура даетъ возможность дополнить данныя уравненія такъ, чтобы прежнія и вновь полученныя составляли систему вполнѣ совмѣстныхъ уравненій. Буду впередъ обозначать полные дифференціалы значкомъ d, а частные δ.

Допустивъ все это, предположу, что я интегрирую только первое уравненіе изъ (1). Тогда по методу Коши я долженъ проинтегрировать вполнѣ слѣдующія уравненія:

$$dx_1 = \frac{dx_k}{0} = -dy_l : \frac{\delta f_1}{\delta q_l} = dq_l : \frac{\delta f_1}{\delta y_l} = dz : \left(f_1 - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_1}{\delta q_l}\right) \ldots (2),$$

гдѣ l имѣетъ всѣ значенія отъ 1 до n, а k отъ 2 до m. Если я найду интегральную систему этихъ уравненій, то пріемъ Майера для полулинейныхъ уравненій дастъ мнѣ возможность составить полный интегралъ. Но къ тѣмъ же уравненіямъ (2) я приду, если буду интегрировать линейное уравненіе:

$$\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + \left(f_1 - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_1}{\delta q_l}\right)\frac{\delta\psi}{\delta z} + \sum_{l-1}^{l=n}\left(\frac{\delta\psi}{\delta q_l} \cdot \frac{\delta f_1}{\delta y_l} - \frac{\delta\psi}{\delta y_l} \cdot \frac{\delta f_1}{\delta q_l}\right) = 0 \ldots (3).$$

Это линейное уравненіе я для краткости буду обозначать символомъ:

$$\sigma(p_1 - f_1, \psi) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Если же я интегрирую только уравненіе второе изъ (1), то система (2) измѣнится только тѣмъ, что вмѣсто f_1 надо подставить f_2, dx_2 дѣлится на 1, а dx_1 на нуль. Въ уравненіи же (3) надо $\frac{\delta\psi}{\delta x_1}$ замѣнить $\frac{\delta\psi}{\delta x_2}$, а f_1 замѣнить f_2. Подобное же будетъ и для всѣхъ уравненій (1), — третьяго, четвертаго, ...m-аго. Буду обозначать линейныя уравненія, соотвѣтствующія всѣмъ этимъ уравненіямъ (1), посредствомъ

$$\sigma(p_2 - f_2, \psi) = 0,\ \sigma(p_3 - f_3, \psi) = 0 \ldots\ldots \sigma(p_m - f_m, \psi) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, установлю относительно системъ (1) и (4) двѣ теоремы.

Теорема 1. Если (1) система вполнѣ совмѣстна, то и система (4) вполнѣ совмѣстна.

Доказательство. Условія полной совмѣстности уравненій (4), какъ извѣстно, состоятъ въ томъ, что каждый коэффиціентъ одного уравненія, поставленный въ другое уравненіе, даетъ такой же результатъ, какой получается отъ подстановки коэффиціента при томъ же частномъ производномъ въ другомъ уравненіи въ первое уравненіе, т. е.

$$\sigma\left(p_k - f_k, f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) \ldots . (1''),$$

$$\sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta y_h}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta y_h}\right) \ldots\ldots (2''),$$

$$\sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_h}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_h}\right) \ldots\ldots (3'').$$

Требуется доказать, что всѣ эти $\frac{(2n+1)m(m-1)}{2}$ условій удовлетворяются, если (1) система вполнѣ совмѣстна. Для доказательства достаточно только написать подробно три вышенаписанныхъ равенства. Начну со втораго.

$$\frac{\delta^2 f_i}{\delta x_k \delta y_h} + \left(f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) \frac{\delta^2 f_i}{\delta z \delta y_h} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_k}{\delta y_l} \frac{\delta^2 f_i}{\delta q_l \delta y_h} - \frac{\delta f_k}{\delta q_l} \frac{\delta^2 f_i}{\delta y_l \delta y_h}\right) = \frac{\delta^2 f_k}{\delta x_i \delta y_h} +$$

$$+ \left(f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) \frac{\delta^2 f_k}{\delta z \delta y_h} + \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta y_l} \frac{\delta^2 f_k}{\delta q_l \delta y_h} - \frac{\delta f_i}{\delta q_l} \frac{\delta^2 f_k}{\delta y_l \delta y_h}\right) \ldots (5).$$

Но условія полной совмѣстности уравненій (1) состоятъ въ $\frac{m(m-1)}{2}$ условіяхъ вида:

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_k} - \frac{\delta f_k}{\delta x_i} + \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_k}{\delta y_l} \frac{\delta f_i}{\delta q_l} - \frac{\delta f_k}{\delta q_l} \frac{\delta f_i}{\delta y_l}\right) = 0 \ldots\ldots (6).$$

Такъ какъ въ f_i и f_k не входитъ z явно, то $\frac{\delta^2 f_i}{\delta z \delta y_h} = 0$; а также $\frac{\delta^2 f_k}{\delta z \delta y_h} = 0$. Послѣ этого ясно, что уравненіе (5) получается изъ тождества (6) дифференцированіемъ послѣдняго по y_h; а потому, если равенство (6)—тождество, то и равенство (5)—тождество.

Легко доказать такимъ же образомъ, что

$$\sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_h}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_h}\right)$$

получается изъ (6) дифференцированіемъ относительно q_h.

Остается разсмотрѣть

$$\sigma\left(p_k - f_k, f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right).$$

Понятно, что это равенство можно представить въ такомъ видѣ:

$$\sigma(p_k - f_k, f_i) - \sigma(p_i - f_i, f_k) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l=n} \left\{ \sigma\left(p_i - f_i, q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_k - f_k, q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) \right\} = 0 \ldots\ldots (7).$$

Первые два члена

$$= \frac{\delta f_i}{\delta x_k} - \frac{\delta f_k}{\delta x_i} + 2 \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l} \frac{\delta f_k}{\delta y_l} - \frac{\delta f_i}{\delta y_l} \cdot \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right),$$

что̀, на основаніи (6),

$$= \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l} \frac{\delta f_k}{\delta y_l} - \frac{\delta f_i}{\delta y_l} \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right).$$

Легко послѣ этого сообразить, что уравненіе (7) можно представить въ видѣ уравненія

$$\sum_{l=1}^{l=n} q_l \left\{ \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right)\right\} = 0,$$

которое есть тождество, такъ какъ каждый членъ суммы—дифференціалъ (6) по q_l, умноженный на q_l.

Теорема 2. Если (4) система вполнѣ совмѣстна, то и система (1) вполнѣ совмѣстпа.

Доказательство. Первая часть тождества

$$\sigma\left(p_k - f_k, f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_i - f_i, f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) = 0,$$

какъ видно изъ доказательства предъидущей теоремы, можетъ быть изображена такъ:

$$\text{1-я часть ур. (6)} + \sum_{l=1}^{l=n} q_l \left\{ \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right)\right\} = 0.$$

Но сумма равна 0 на томъ основаніи, что уравненія (4) предполагаются вполнѣ совмѣстными. И такъ я имѣю тождественно:

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_k} - \frac{\delta f_k}{\delta x_i} + \sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l}\cdot\frac{\delta f_k}{\delta y_l} - \frac{\delta f_i}{\delta y_l}\cdot\frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) = 0;$$

что и требовалось доказать.

Первая изъ этихъ теоремъ показываетъ, что для интеграціи системъ (4) я могу употребить методъ Майера. Этотъ методъ состоитъ въ томъ, что перемѣнныя $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ замѣняются новыми $u_1, u_2, u_3 \dots u_m$, опредѣляемыми изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + (u_1 - u_{10}) v_1, \\ x_2 &= x_{20} + (u_1 - u_{10}) v_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= x_{m0} + (u_1 - u_{10}) v_m \end{aligned}\right\} \dots\dots (14),$$

гдѣ $x_{10}, x_{20} \dots x_{m0}$, u_{10}—начальныя значенія перемѣнныхъ $x_1, x_2 \dots x_m$ и u_1, а $v_1, v_2 \dots v_m$—функціи $u_1, u_2, u_3 \dots u_m$, вполнѣ опредѣлен-

ныя и не обращающіяся въ безконечность при $u_1 = u_{10}$. Въ такомъ случаѣ, обозначая черезъ a съ двойнымъ значкомъ коэффиціенты въ уравненіяхъ системы (4), а черезъ b съ двойнымъ значкомъ коэффиціенты въ новыхъ уравненіяхъ (первый значокъ будетъ обозначать уравненіе, изъ котораго взятъ коэффиціентъ, а второй значокъ производную, при которой стоитъ коэффиціентъ), имѣю: (смотри сочиненіе Мансіона, страница 215)

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} a_{ik} v_i + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} a_{ik},\ b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} a_{ik}.$$

Въ примѣненіи къ системѣ (4) эти формулы дадутъ: 1) для коэффиціентовъ передъ производными отъ ψ по y_k:

$$\left.\begin{aligned} b_{1k} &= -\sum_{i=1}^{i=m} v_i \frac{\delta f_i}{\delta q_k} - (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} \frac{\delta f_i}{\delta q_k}, \\ b_{hk} &= -(u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} \frac{\delta f_i}{\delta q_k} \end{aligned}\right\} \dots\dots (8),$$

2) для коэффиціентовъ передъ производными отъ ψ по q_k:

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} v_i \frac{\delta f_i}{\delta y_k} + (u - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} \frac{\delta f_i}{\delta y_k},\ b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} \frac{\delta f_i}{\delta y_k} (9),$$

3) для коэффиціентовъ передъ производною отъ ψ по z:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{i=m} f_i v_i + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} f_i - \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{l=1}^{l=n} v_i q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}$$

$$-(u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l},\ b_h = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} f_i$$

$$-(u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l} \dots\dots (10).$$

Разсматривая всѣ эти коэффиціенты, легко замѣтить, что, если обозначимъ производныя по u отъ ψ черезъ ω со значками, новыя линейныя уравненія будутъ ни болѣе, ни менѣе, какъ

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma\left(\omega_1-\sum_{i=1}^{i=m} v_i f_i-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_1}f_i,\psi\right)=0,\\
&\sigma\left(\omega_2-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_2}f_i,\psi\right)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma\left(\omega_m-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_m}f_i,\psi\right)=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(11).$$

Для интеграціи этихъ уравненій употребляются тѣже уравненія съ полными дифференціалами, что̀ для интеграціи слѣдующихъ нелинейныхъ уравненій:

$$\omega_1-\sum_{i=1}^{i=m} f_i\left(v_i+(u_1-u_{10})\frac{\partial v_i}{\partial u_1}\right)=0\ldots\ldots(12),$$

$$\omega_2-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_2}f_i=0,\qquad \omega_3-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_3}f_i=0,$$

$$\ldots\ldots\omega_m-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_m}f_i=0\ldots\ldots(13).$$

Майеръ показалъ, что интегральная система перваго изъ уравненій (11) есть также интегральная система каждаго изъ остальныхъ уравненій системы (11), если при нахожденіи интегральной системы перваго уравненія всѣ u кромѣ u_1 принимались за постоянныя, если интеграціонными постоянными были начальныя значенія перемѣнныхъ y, z, q, u_1, и если y_0, z_0, q_0 (начальныя значенія y, z и q) будутъ постоянныя, независимыя отъ $u_2, u_3 \ldots u_m$ (т. е. при разрѣшеніи интеграловъ относительно y_0, z_0, q_0 всѣ члены, зависящія только отъ $u_2, u_3 \ldots u_m$, уничтожаются).

Интегральная система каждаго изъ уравненій (11), какъ уже сказано, есть интегральная система тѣхъ совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами, которыя служатъ по методу Коши для опредѣленія полнаго интеграла каждаго изъ уравненій (12) и (13). Если я буду интегрировать уравненіе (12) по методу Коши, то во время интеграціи y_0, q_0 не считаются зависимыми отъ $u_2 \ldots u_m$, которыя принимаются за постоянныя; слѣдовательно сто̀итъ только въ полномъ интегралѣ уравненія (12) z_0 считать за постоянное, независящее отъ $u_2, u_3 \ldots u_m$, чтобы этотъ полный интегралъ былъ общій для всѣхъ уравненій (12) и (13), ибо онъ получается для всѣхъ уравненій изъ одной и той же интегральной системы.

Легко замѣтить, что уравненія (12) и (13) могутъ получаться непосредственно изъ уравненій (1) замѣною перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ новыми перемѣнными $u_1, u_2 \ldots u_m$. Поэтому полный интегралъ системы (1) прямо получится, когда въ полномъ интегралѣ системы 12—13 замѣнимъ $u_1, u_2, \ldots u_m$ обратно чрезъ $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Ясно, что ходъ вычисленія полнаго интеграла для системы (1) будетъ такой: 1) замѣняю перемѣнныя $x_1, x_2 \ldots x_m$ новыми $u_1, u_2, u_3 \ldots u_m$, опредѣленными изъ уравненій (14), и получаю систему 12—13; 2) ищу полный интегралъ для (12), въ которомъ z_0 постоянное; 3) дѣлаю въ найденномъ полномъ интегралѣ обратную замѣну $u_1, u_2 \ldots u_m$ черезъ $x_1, x_2 \ldots x_m$ съ помощью уравненій (14).

Ли употреблялъ подстановку болѣе простую, чѣмъ (14); а именно онъ полагалъ $x_1 = u_1$, $x_2 = x_{20} + (u_1 - u_{10})u_2$, $x_3 = x_{30} + (u_1 - u_{10})u_3 \ldots\ldots x_m = x_{m0} + (u_1 - u_{10})u_m \ldots\ldots(15)$. Тогда уравненія (12) и (13) замѣнятся слѣдующими:

$$\omega_1 - f_1 - \sum_{i=2}^{i=m} u_i f_i = 0\ldots\ldots(16),$$

$$\omega_k - (x_1 - x_{10}) f_k = 0\ldots\ldots(17),$$

гдѣ k имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до m.