M. TIKHOMANDRITZKY.

Éléments de la théorie des intégrales Abéliennes.

ОСНОВАНІЯ ТЕОРІИ

abelev'ikh integralov

АБЕЛЕВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

M Tikhomandritskago

М. Тихомандрицкаго,

Орд. проф. Императорскаго Харьковскаго Университета.

Izdanie Khar'kovskago Matematicheskago obshchestva

Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества.

Khar'kov

ХАРЬКОВЪ.

Типографія Адольфа Дарре. Рыбная, № 28.

1895.

На основаніи § 9-го устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества проф. *К. Андреевъ*.

13 Мая 1894 г.

Предисловіе.

Теорія Абелевыхъ интеграловъ, начало которой положено безсмертнымъ Норвежскимъ математикомъ *Абелемъ* знаменитою теоремой, носящей, какъ и интегралы, которыхъ она касается, его имя, трудами самого Абеля, а затѣмъ германскихъ ученыхъ: *Якоби*, Ришело, Гёпеля, Розенгайна, особенно *Римана* и его учениковъ, каковы Рохъ, Нейманъ, Кёнигсбергеръ, Веберъ, Примъ, Крацеръ, Томэ; далѣе *Клебша* и Гордана, и ихъ учениковъ, Линдемана, Клейна, особенно *Нётера*, и наконецъ *Вейерштрасса*, во Франціи Эрмита, Бріо и Букэ и другихъ, настолько уже хорошо разработана, главные моменты настолько хорошо уяснены, что въ настоящее время *вся теорія Абелевыхъ интеграловъ легко развивается изъ одного тождества*. Первый, кто нашелъ это, былъ *Вейерштрассъ*, затѣмъ къ тому же пришелъ и *Нётеръ*, разрабатывая алгебраическую часть Клебшевской теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Въ своихъ лекціяхъ именно, по теоріи гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, Вейерштрассъ вывелъ изъ этого тождества сперва формы нормальныхъ интеграловъ второго и третьяго рода, соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода, выраженія Абелевыхъ интеграловъ и алгебраическихъ функцій чрезъ примфункціи (отвѣчающія линейнымъ множителямъ раціональной функціи независимой перемѣнной x); отсюда, какъ простое слѣдствіе, теорему Абеля; изъ частнаго случая послѣдней задачу Якоби и наконецъ теорію Θ-функцій, при помощи которой рѣшается эта задача. Этотъ капитальнѣйшій результатъ изслѣдованій Вейерштрасса въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, не смотря на то, что подкрѣпленъ глубокими изслѣдованіями Нётера, пришедшаго къ тому же независимо другимъ путемъ, все еще остается, повидимому, не настолько замѣченнымъ и оцѣненнымъ, какъ онъ того заслуживаетъ, даже въ самой Германіи, гдѣ много учениковъ Вейерштрасса. Главной причиной этому служитъ увлеченіе каждаго ученаго изслѣдователя своимъ направленіемъ — наиболѣе послѣдователей имѣютъ Риманъ и Клебшъ, — отчасти и то, что лекціи Вейерштрасса до сихъ поръ не изданы, слѣд., рѣдко доступны не ученикамъ его; наконецъ, можетъ быть и самый методъ изложенія, къ которому надобно таки привыкнуть; у Вейерштрасса всѣ выводы и доказательства основаны на формѣ разложенія въ ряды функцій, имъ разсматриваемыхъ, вблизи особыхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ; это постоянное употребленіе рядовъ затягиваетъ изложеніе, дѣлаетъ его слишкомъ абстрактнымъ и утомляетъ читателя, который, занявшись деталями разсужденій и доказательствъ, не получаетъ часто столь яснаго, какъ желательно, представленія существеннѣйшихъ моментовъ теоріи. Я склоненъ объяснять успѣхъ моего скораго ознакомленія съ теоріей Вейерштрасса по его лекціямъ, рукопись которыхъ я встрѣтилъ въ 1884 г. въ Лейпцигскомъ математическомъ семинарѣ, тѣмъ именно обстоятельствомъ, что вслѣдствіе особеннаго интереса, который я ранѣе получилъ къ его работамъ, отчасти вслѣдствіе моихъ изысканій въ теоріи эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ интеграловъ до поѣздки за границу, особенно же вслѣдствіе знакомства съ изслѣдованіями въ этой области Нётера, любезно переданными мнѣ профессоромъ Клейномъ, какъ только онъ получилъ ихъ отъ автора, желая поскорѣе составить себѣ понятіе о сущности этой теоріи, я ограничился сперва бѣглымъ просмотромъ записокъ, не останавливаясь на подробностяхъ доказательствъ. Переходя потомъ къ разсмотрѣнію доказательствъ, я живо замѣтилъ, какъ много они выиграли бы въ краткости и ясности, и легкости усвоенія, если бы Вейерштрассъ дозволилъ себѣ прибѣгнуть къ Римановой поверхности. Восхищенный сущностью Вейерштрассовской теоріи Абелевыхъ интеграловъ, въ которой я нашелъ то, къ чему стремился, я тогда же задался мыслію поскорѣе познакомить моихъ соотечественниковъ съ нею, и по пріѣздѣ въ Берлинъ написалъ тамъ свою докторскую диссертацію подъ заглавіемъ „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ", въ которой изложилъ теорію Вейерштрасса въ примѣненіи къ гиперэллиптическимъ интеграламъ. Тогда же я задумалъ изложить и теорію Абелевыхъ интеграловъ вообще, но былъ остановленъ въ осуществленіи этого намѣренія сознаніемъ необходимости поработать надъ усовершенствованіемъ нѣкоторыхъ важныхъ пунктовъ алгебраической части этой теоріи, не будучи удовлетворенъ тѣмъ, что я нашелъ въ заграничной литературѣ по этому предмету. Мнѣ хотѣлось именно алгебраическое выводить при помощи однихъ алгебраическихъ дѣйствій, раціональное при помощи однихъ раціональныхъ, прибѣгать къ рядамъ лишь тамъ, гдѣ не можетъ быть другихъ средствъ, не основывать ничего на теоріи кривыхъ, какъ то дѣлается послѣдователями Клебша, чтобы не ставить изслѣдованіе отвлеченныхъ величинъ въ зависимость отъ изслѣдованія спеціальныхъ величинъ, протяженныхъ, разсматривать функціи, а не формы, какъ то принято въ школѣ Клебша и Клейна, ибо понятіе о функціяхъ элементарнѣе понятія о формахъ. Однимъ словомъ я хотѣлъ устранить всѣ тѣ сложности и трудности, которыя были внесены въ теорію Абелевыхъ интеграловъ извнѣ, методами изслѣдованія, системою изложенія, вспомогательными теоріями, чтобы идти прямой дорогой въ развитіи теоріи и имѣть дѣло лишь съ тѣми, которыя присущи самому предмету. Конечно, всякій изслѣдователь воленъ употреблять тѣ орудія и методы изслѣдованій, которыми онъ лучше владѣетъ; расширять науку всѣ средства, ведущія къ цѣли, хороши; но углубленіе науки требуетъ, чтобы всѣ выводы и доказательства вытекали изъ существа дѣла, а не основывались на постороннихъ теоріяхъ. При этомъ я рѣшительно отдаю предпочтеніе выводу предъ доказательствомъ, ибо доказательство часто только принуждаетъ къ признанію истины, не раскрывая вполнѣ эволюціи одной изъ другой.

Приступивъ ради этого къ переработкѣ того, что болѣе меня удовлетворяло въ изслѣдованіяхъ иностранныхъ ученыхъ, я вскорѣ однако надолго былъ отвлеченъ другими обязанностями отъ начатой работы. Тѣмъ временемъ Нётеръ успѣлъ дальше обработать свои изслѣдованія и издать сущность своихъ лекцій по теоріи Абелевыхъ интеграловъ (Mathem. Ann. Bd. 37). Это снова воротило меня къ моимъ изысканіямъ, и въ іюнѣ 1892 года мнѣ удалось найти методъ опредѣленія рода (ранга по Вейерштрассу) алгебраической функціи, опредѣляемой неприводимымъ уравненіемъ самаго общаго вида, и тѣхъ функцій, которыя, будучи приравнены нулю, даютъ присоединенныя кривыя (adjungirte Curven) Нётера, при помощи раціональныхъ дѣйствій, именно алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя,—что я считаю весьма важнымъ результатомъ, въ виду фундаментальнаго значенія этихъ моментовъ въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, такъ какъ способы, предложенные для этого Нётеромъ и Раффи, сложны и теоретически, и практически. Когда такимъ образомъ главная удерживавшая меня трудность была преодолѣна, я рѣшился вновь сдѣлать попытку изложенія основаній Вейерштрассовской теоріи Абелевыхъ интеграловъ, принявъ во вниманіе также изслѣдованія Римана, Неймана, особенно Нётера, Бріо и Букэ и мои собственныя. Свой опытъ нынѣ предлагаю вниманію отечественныхъ любителей математики. Вотъ вкратцѣ его содержаніе.

Во введеніи я даю опредѣленіе того, что называется Абелевымъ интеграломъ, и мимоходомъ вывожу Аронгольдовскую форму этихъ интеграловъ, хотя дальше ею нигдѣ не пользуюсь.

Въ первой главѣ изслѣдую свойства неявной алгебраической функціи, объясняю Риманову поверхность для этой функціи, ея рангъ; вывожу по Нейману формулу Римана, дающую связь между рангомъ съ одной стороны, и числомъ листовъ и винтовыхъ точекъ съ другой; затѣмъ по Бріо и Букэ съ моими собственными дополненіями излагаю способъ вычисленія рода (ранга); затѣмъ перехожу къ дискриминанту уравненій, опредѣляю по Бріо и Букэ степень кратности каждаго его корня и разлагаю на два множителя, существенный и несущественный, по Кронекеру.

Вторая глава посвящена раціональнымъ функціямъ отъ x и y, алгебраической функціи перваго (однозначныхъ на Римановой поверхности для y). Послѣ нѣкоторыхъ общихъ предложеній, доказанныхъ по Риману и Вейерштрассу, перехожу къ опредѣленію *присоединенныхъ функцій* вообще, въ частности же перваго, второго и третьяго рода, по Нётеру и на основаніи моихъ изслѣдованій. Свойства этихъ функцій выводятся по Нётеру съ тѣми отступленіями, которыя вызваны тѣмъ, что я разсматриваю функціи, а не формы, какъ Нётеръ. Затѣмъ показываю разложеніе алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности, на функціи этихъ трехъ родовъ (éléments simples Hermite'a), наконецъ здѣсь же выводится вышеупомянутое тождество, служащее источникомъ всей теоріи Вейерштрасса.

Въ третьей главѣ разсматриваются уже интегралы: устанавливаются три рода интеграловъ и ихъ обозначеніе, и выполняется приведеніе къ нимъ общаго Абелева интеграла.

Въ четвертой главѣ изъ вышеупомянутаго тождества при помощи интегрированія выводятся соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода, примъ-функціи и выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ трехъ родовъ.

Въ пятой главѣ дается выраженіе чрезъ примъ-функціи раціональной функціи отъ x, y, однозначной на Римановой поверхности для y, и отсюда получается теорема Абеля.

Въ шестой главѣ разсматривается задача Якоби и Абелевы трансцендентныя второго и третьяго рода; разсмотрѣніе частныхъ производныхъ функцій второго рода приводитъ къ одной особой функціи, къ которой сперва все и сводится; затѣмъ примѣненіе теоремы Абеля къ одному частному случаю чрезъ посредство интеграловъ третьяго рода даетъ выраженіе логариѳма алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности для y, чрезъ ту же вспомогательную функцію; слѣдующій затѣмъ переходъ отъ логариѳма къ числу приводитъ насъ къ Θ-функціи. Затѣмъ дается рѣшеніе задачи Якоби съ помощію Θ-функцій согласно съ Клебшемъ и Горданомъ, Бріо и Букэ.

Послѣдняя, седьмая, глава посвящена выводу свойствъ общей Θ-функціи изъ ея опредѣленія, даннаго въ предыдущей главѣ, и сведенію общей къ Якобіевской. Здѣсь мы придерживались во многомъ послѣдней главы нашего „Обращенія гиперэллиптическихъ интеграловъ“.

Въ настоящемъ сочиненіи мы ограничились лишь изложеніемъ основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ, а вовсе не думаемъ предлагать полный трактатъ, исчерпывающій все, что сдѣлано по этому предмету различными учеными: на это у насъ теперь нѣтъ времени, да не много нашлось бы, пожалуй, и читателей, такъ какъ у насъ только что начинаютъ заниматься теоріей Абелевыхъ интеграловъ. Буду очень радъ, если предлагаемый трудъ, знакомя съ основаніями самой простой, естественной и изящной теоріи Абелевыхъ интеграловъ, будетъ способствовать расширенію круга лицъ, интересующихся этимъ предметомъ; полагаю, что это не невозможно, такъ какъ я не требую отъ читателя большой учености: свѣдѣній, даваемыхъ обыкновенными нашими университетскими курсами по высшей алгебрѣ, дифференціальному и интегральному исчисленію, да основаній теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, вполнѣ достаточно, чтобы вполнѣ овладѣть нашимъ изложеніемъ основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

М. Тихомандрицкій.

31 Марта 1893 г.

Оглавление.

Введеніе.

1. Пусть дано неприводимое алгебраическое уравненіе между перемѣнными x, y:

$$\overset{m\ n}{F(x, y)} = 0, \tag{1}$$

первая часть котораго, слѣд., есть неразлагающаяся на раціональные множители цѣлая функція этихъ перемѣнныхъ, — степени m относительно x и степени n относительно y; изъ этого уравненія чрезъ дифференцированіе легко получается такое соотношеніе между дифференціалами обѣихъ перемѣнныхъ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}; \tag{2}$$

помножая обѣ части на раціональную функцію x и y, напр. $f(x,y)$, и интегрируя, мы будемъ имѣть въ двоякой формѣ самый общій Абелевъ интегралъ:

$$\int f(x,y)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\int f(x,y)\frac{dy}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}. \tag{3}$$

Къ такому виду приводится и всякій другой интегралъ отъ раціональной функціи x и y, напр.

$$\int \Phi(x, y)dx: \tag{4}$$

стоитъ только помножить и раздѣлить $\Phi(x,y)$ на $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$; тогда, полагая

$$\Phi(x,y)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f(x,y), \tag{5}$$

мы будемъ имѣть интегралъ лѣвой части (3).

Если x принять за независимую перемѣнную, то $f(x,y)$, раціональную функцію x, y, всегда можно привести къ такому виду, какъ то показалъ Абель:

$$f(x,y)=\frac{f(x,\overset{n-1}{y})}{\psi(x)}, \tag{6}$$

гдѣ $f(x,\overset{n-1}{y})$ и $\psi(x)$ цѣлыя функціи своихъ аргументовъ, такъ что интегралъ лѣвой части (3) окончательно приметъ такой видъ:

$$\int\frac{f(x,\overset{n-1}{y})}{\psi(x)}\cdot\frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}. \tag{7}$$

Въ этой формѣ, установленной Абелемъ, мы и будемъ его разсматривать.

2. Послѣдователи Клебша принимаютъ Аронгольдовскую форму для Абелевыхъ интеграловъ, которую можно такъ вывести изъ предыдущей. Полагая

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}, \tag{1}$$

и введя эти новыя перемѣнныя x_1, x_2, x_3 въ уравненіе (1) пред. §, мы дадимъ ему, умножая на x^{μ}, гдѣ $\mu=m+n$, такой видъ:

$$x_3^{\mu}F\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=f(x_1,x_2,x_3)=0, \tag{2}$$

гдѣ $f(x_1,x_2,x_3)$ цѣлая однородная функція перемѣнныхъ x_1,x_2,x_3 измѣренія μ. Слѣд., по теоремѣ Эйлера будетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}x_3=\mu f=0, \tag{3}$$

тогда какъ дифференцированіе даетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3=0; \tag{4}$$

изъ этихъ двухъ уравненій получаемъ:

$$\frac{x_2dx_3-x_3dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}=\frac{x_3dx_1-x_1dx_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}=\frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}=\frac{\sum\pm c_1x_2dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3}c_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}, \tag{5}$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 совершенно произвольныя величины, а $\sum\pm c_1x_2dx_3$ обозначаетъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ dx_1 & dx_2 & dx_3\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Но

$$dx=d\,\frac{x_1}{x_3}=\frac{x_3dx_1-x_1dx_3}{x_3^2}, \tag{7}$$

и изъ (2), дифференцируя по x_2, получаемъ:

$$x_3^{\mu}\,\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{1}{x_3}=\frac{\partial f}{\partial x_2}; \tag{8}$$

слѣд.,

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=x_3^{\mu-3}\,\frac{x_3dx_1-x_1dx_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}=x_3^{\mu-3}\,\frac{\sum\pm c_1x_2dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}c_i}; \tag{9}$$

помножая на

$$f(x,y)=f(x_1,x_2,x_3)=\frac{\Phi(x_1,x_2,x_3)}{\Psi(x_1,x_2,x_3)}, \tag{10}$$

— что будетъ однородная функція, числитель и знаменатель которой будутъ одинаковаго измѣренія, пусть ν', мы будемъ имѣть:

$$f(x,y)\,\frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\frac{\Phi(x_1,x_2,x_3)}{\Psi(x_1,x_2,x_3)}\,x_3^{\mu-3}\,\frac{\sum\pm c_1x_2dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}c_i}, \tag{11}$$

или, скрывая множитель $x_3^{\mu-3}$ подъ знакомъ функціи, стоящей въ числителѣ:

$$f(x,y)\,\frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\frac{\Theta(x_1,x_2,x_3)}{\Psi(x_1,x_2,x_3)}\,\frac{\sum\pm c_1x_2dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}c_i}; \tag{12}$$

гдѣ измѣреніе числителя $\nu=\nu'+\mu-3$.

Интегрируя, будемъ имѣть Абелевъ интегралъ въ Аронгольдовской формѣ:

$$\int f(x,y)\,\frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\int\frac{\Theta(x_1,x_2,x_3)}{\Psi(x_1,x_2,x_3)}\,\frac{\sum\pm c_1x_2dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}c_i}, \tag{13}$$

гдѣ перемѣнныя связаны уравненіемъ

$$f(x_1,\overset{\mu}{x_2},x_3)=0, \tag{14}$$

и гдѣ измѣреніе однородной функціи $\Theta(x_1,x_2,x_3)$ превышаетъ на $\mu-3$ измѣреніе однородной функціи $\Psi(x_1,x_2,x_3)$. Клебшъ и Горданъ въ своей книгѣ показали, что такъ необходимо должно быть, чтобы при условія (14) интегралъ (13) зависѣлъ отъ одной перемѣнной. Въ теоріи ихъ, также у Нётера и Клейна, роль dx играетъ

(15) $$d\omega_x = \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial f}{\partial x_i} c_i},$$

и дифференцировать однородную функцію $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, или *форму*, предполагая перемѣнныя связанными уравненіемъ (14), по Клейну значитъ полный дифференціалъ этой функціи: $d\varphi(x_1, x_2, x_3)$ раздѣлить на dx, такъ что роль производной принимаетъ на себя $\frac{d\varphi}{d\omega_x}$. Выгода, представляемая Аронгольдовской формой Абелевыхъ интеграловъ (13), заключается въ томъ, что она освобождаетъ отъ обязанности разсматривать особо безконечныя значенія перемѣнныхъ, такъ какъ x и y обращаются въ безконечности для $x_3 = 0$ при x_1 и x_2 отличныхъ отъ нуля; разсматриваніе же въ связи съ теоріей кривыхъ даетъ бóльшую, такъ сказать, наглядность многимъ предложеніямъ; но взамѣнъ того такое изслѣдованіе интеграловъ требуетъ отъ читателя большей подготовки въ геометріи и теоріи формъ, и кромѣ того представляетъ ту невыгоду, теоретическую, что ставитъ изученіе свойствъ отвлеченныхъ величинъ въ зависимость отъ изученія величинъ частнаго рода протяженныхъ. Поэтому мы будемъ разсматривать Абелевы интегралы въ прежней формѣ, Абелевской, (7) § 1, и если дали здѣсь выводъ Аронгольдовской формы, то для того только, чтобы облегчить читателя, который пожелалъ бы заглянуть въ мемуары авторовъ, слѣдующихъ Клебшевскому направленію въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

3. Такъ какъ каждому значенію x по уравненію (1) § 1 отвѣчаетъ n значеній y, вообще различныхъ, то интегралъ (7) § 1 получитъ опредѣленный смыслъ только тогда, когда будетъ данъ рядъ послѣдовательныхъ значеній x:

(1) $$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \; X,$$

и рядъ соотвѣтственныхъ значеній y:

(2) $$y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n, \; Y,$$

т. е. такихъ, что для каждаго значенія i будетъ имѣть мѣсто уравненіе:

(3) $$F(x_i, y_i) = 0.$$

Вслѣдствіе этого опредѣленные Абелевы интегралы многіе пишутъ такъ:

(4) $$\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{f(x, y)}{\psi(x)} \frac{dx}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}.$$

Совокупность значеній x_i, y_i перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющихъ условію (3), Бріо и Букэ называютъ *аналитическою точкою* (выраженіе, которое мы будемъ иногда употреблять), и измѣненіе пары (x, y) отъ пары (x_0, y_0) до пары (X, Y) чрезъ рядъ паръ (x_i, y_i), гдѣ x_i и y_i суть соотвѣтственные члены рядовъ (1) и (2), *движеніемъ* аналитической точки по этому пути. Говоря точка x, мы будемъ представлять себѣ ту точку плоскости, которой абсцисса будетъ равна вещественной части x, а ордината коэффиціенту при $\sqrt{-1}$, предполагая x вообще комплексною величиною. При измѣненіи въ нѣкоторой зависимости составныхъ частей комплексной величины x, отвѣчающая указаннымъ образомъ точка плоскости будетъ чертить по ней кривую линію, которая будетъ сомкнутою, когда x вернется къ своему первоначальному значенію. Аналогичное построеніе можно сдѣлать и для перемѣнной y; тогда каждой точкѣ x въ первой плоскости будетъ отвѣчать вообще n различныхъ точекъ во второй плоскости (и каждой точкѣ y во второй m вообще различныхъ точекъ въ первой), которыя будутъ чертить столько же кривыхъ въ этой второй плоскости, когда точка x будетъ чертить кривую въ своей плоскости. Если x опишетъ въ своей плоскости сомкнутую кривую, то соотвѣтственныя n точекъ въ плоскости (y) опишутъ кривыя, которыя могутъ и не быть сомкнутыми, по крайней мѣрѣ нѣкоторыя. Про аналитическую точку (x, y) говорятъ, что она описала сомкнутую кривую, когда не только точка x описала таковую въ своей плоскости, но и избранная изъ n соотвѣтственныхъ точекъ y въ своей плоскости (y). Разсмотрѣніе заразъ двухъ плоскостей представляетъ методъ, легко распространимый на функціи какого угодно числа комплексныхъ перемѣнныхъ, независимыхъ или зависимыхъ, для обозрѣванія всей совокупности соотвѣтственныхъ значеній этихъ перемѣнныхъ, но въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ гораздо удобнѣе придуманныя для этого Риманомъ многолиственныя поверхности, съ которыми мы познакомимъ читателя въ первой же главѣ. Вейерштрассъ въ своихъ лекціяхъ обходится безъ нихъ; но если вникнуть въ его выраженія, то можно подмѣтить неявное ихъ употребленіе, — такъ онѣ естественны въ этой теоріи. Но въ такомъ случаѣ лучше уже явное ихъ употребленіе, ибо чрезъ это значительно выигрывается для автора легкость изложенія, для читателя легкость представленія и пониманія излагаемаго. Пользованіе тѣмъ пособіемъ, какое представляютъ эти поверхности, не будетъ противорѣчить чисто аналитическому характеру, который мы желаемъ придать нашему изложенію, ибо мы намѣрены пользоваться этимъ пособіемъ только какъ средствомъ краткаго и точнаго указанія *пути интегрированія*, т. е. ряда паръ соотвѣтственныхъ значеній x и y, чрезъ которыя проходитъ аналитическая точка отъ одного предѣла интеграла до другого.

4. Свойства Абелеваго интеграла [(7) § 1] зависятъ прежде всего отъ свойствъ функціи y отъ x, опредѣляемой уравненіемъ (1) § 1, затѣмъ отъ свойствъ функціи $\dfrac{f(x,y)}{\psi(x)}$; поэтому мы должны начать изложеніе теоріи Абелевыхъ интеграловъ съ изслѣдованія и описанія свойствъ функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (1) § 1,—это составитъ содержаніе первой главы; здѣсь мы ознакомимся, какъ сказано, и съ Римановой поверхностью; затѣмъ мы должны перейти къ изслѣдованію функцій раціональныхъ отъ x, y — что составитъ предметъ второй главы; въ ней же мы выведемъ основное тождество, о которомъ было упомянуто въ предисловіи.

ГЛАВА I.

Свойства неявной функціи, опредѣляемой неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ.

5. Изъ уравненія

$$\overset{m\ n}{F(x, y)} = 0, \tag{1}$$

гдѣ

$$\overset{m\ n}{F(x, y)} = f_0(\overset{m}{x})y^n + f_1(\overset{m}{x})y^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(\overset{m}{x})y + f_n(\overset{m}{x}), \tag{2}$$

и $f_0(\overset{m}{x})$, $f_1(\overset{m}{x})$, $f_2(\overset{m}{x}) \ldots f_{n-1}(\overset{m}{x})$, $f_n(\overset{m}{x})$ цѣлыя функціи x степени m, для каждаго значенія x получается для y n значеній вообще различныхъ и конечныхъ, какъ то слѣдуетъ изъ Высшей Алгебры; исключеніе можетъ имѣть мѣсто только для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$f_0(\overset{m}{x}) = 0, \tag{3}$$

— когда одно или нѣсколько значеній y дѣлаются безконечными, и также для тѣхъ значеній x, которыя вмѣстѣ съ соотвѣтственными значеніями y удовлетворяютъ кромѣ (1) также и такому уравненію:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

когда нѣсколько значеній y дѣлаются равными. Исключая y изъ уравненія (4) при помощи (1), получимъ уравненіе

$$\Delta(x) = 0, \tag{5}$$

гдѣ

$$\Delta(x) = [f_0(\overset{m}{x})]^{n-2} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F(x, y_i)}{\partial y_i}, \tag{6}$$

а $y_1, y_2, \ldots y_n$ значенія y для разсматриваемаго значенія независимой перемѣнной x. Функція $\Delta(x)$ называется *дискриминантомъ* уравненія (1) по y; уравненіе (5) даетъ тѣ значенія x, для которыхъ нѣкоторыя изъ значеній y, опредѣляемыхъ уравненіемъ (1), дѣлаются равными. Результантъ уравненій (1) и (4) только численнымъ множителемъ отличается отъ результанта уравненія (4) и слѣдующаго:

$$nF(x, y) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y = 0, \tag{7}$$

которое тоже степени $n-1$ относительно y, какъ и (4); слѣд., онъ будетъ степени $n-1$ относительно коэффиціентовъ каждаго изъ этихъ уравненій, слѣд., степени $2(n-1)$ относительно коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), а какъ тѣ степени m относительно x, то отсюда заключаемъ, что степень дискриминанта $\Delta(x)$ относительно x будетъ

$$2m(n-1); \tag{8}$$

слѣд., для такого числа значеній x уравненіе (1) можетъ давать для y равныя значенія. Эти значенія x однако вообще не будутъ всѣ различныя; другими словами, уравненіе (5) вообще можетъ имѣть равные корни. Различныя значенія x такого рода найдутся изъ уравненія степени $\mu < 2m(n-1)$ относительно x:

$$\Delta_1(x) = 0, \tag{9}$$

если $\Delta_1(x)$ есть частное отъ дѣленія $\Delta(x)$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\Delta(x)$ и его производной, т. е. если

$$\Delta_1(x) = \Delta(x) : D[\Delta(x), \Delta'(x)]. \tag{10}$$

6. Всю совокупность значеній пары x и y, удовлетворяющихъ уравненію (1), Вейерштрассъ называетъ *алгебраическимъ образомъ* (algebraische Gebilde); каждое отдѣльное значеніе x вмѣстѣ съ однимъ изъ соотвѣтствующихъ значеній y *мѣстомъ* алгебраическаго образа (eine Stelle der alg. Geb.); если x не удовлетворяетъ ни одному изъ уравненій (3) и (9), то такое мѣсто алгебраическаго образа онъ называетъ *обыкновеннымъ;* въ противномъ случаѣ, т. е. если x удовлетворяетъ одному изъ названныхъ сейчасъ уравненій, онъ называетъ его *особеннымъ мѣстомъ*. Мѣста алгебраическаго образа, гдѣ одна изъ перемѣнныхъ x, или y, или обѣ, получаютъ безконечно-большое значеніе, Вейерштрассъ называетъ *безконечно-удаленными* мѣстами алгебраическаго образа (unendlich-ferne Stelle der alg. Geb.). Значенія x, удовлетворяющія одному изъ уравненій (3) или (9) Briot et Bouquet называютъ *особенными алгебраическими точками;* въ частности тѣ, въ которыхъ y обращается въ безконечность, но такъ что обратная его величина $\frac{1}{y}$ остается конечною, *полюсами*, а тѣ, въ которыхъ нѣкоторыя изъ значеній y дѣлаются равными, они называютъ *критическими точками;* Риманъ называетъ послѣднія *точками развѣтвленія* функціи (Verzweigungspunct); причины этихъ названій будутъ ниже объяснены.

Особенная точка можетъ быть заразъ и полюсомъ, и точкою развѣтвленія, или критическою, если именно нѣсколько изъ значеній y обращаются въ безконечность.

7. Для тѣхъ значеній x, которыя удовлетворяютъ заразъ уравненіямъ:

$$f_0(\overset{m}{x}) = 0 \quad \text{и} \quad f_n(\overset{m}{x}) = 0, \tag{1}$$

нѣкоторыя изъ значеній y будутъ равны нулю, другія безконечности. Этого обстоятельства можно избѣгнуть, введя вмѣсто y новую функцію, положивъ

$$y = z + c, \tag{2}$$

и опредѣливъ c такъ, чтобы послѣдній членъ преобразованнаго уравненія, который будетъ

$$= F(\overset{m}{x}, \overset{n}{c}), \tag{3}$$

и первый коэффиціентъ, который останется тотъ же $f_0(\overset{m}{x})$, не имѣли общихъ корней, что всегда возможно: стоитъ только искать общаго наибольшаго дѣлителя

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{c}) \quad \text{и} \quad f_0(\overset{m}{x});$$

послѣдній остатокъ будетъ функція одного c:

$$\varphi(c);$$

надобно дать c значеніе, отличное отъ корней уравненія

$$\varphi(z) = 0,$$

чтобы не было

$$\varphi(c) = 0,$$

и тогда уравненія

$$f_0(\overset{m}{x}) = 0 \quad \text{и} \quad F(\overset{m}{x}, \overset{n}{c}) = 0$$

не будутъ имѣть общихъ корней. Если $f_0(\overset{m}{x}) = 1$, то y ни для какого конечнаго значенія x не будетъ обращаться въ безконечность, подобно цѣлой раціональной функціи; почему алгебраическая функція, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y^n + f_1(\overset{m}{x}) y^{n-1} + f_2(\overset{m}{x}) y^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(\overset{m}{x}) y + f_n(\overset{m}{x}) = 0, \tag{4}$$

гдѣ $f_1(\overset{m}{x}), f_2(\overset{m}{x}) \ldots . f_n(\overset{m}{x})$ цѣлыя раціональныя функціи x, называется *цѣлою алгебраическою функціей* (ganze algebraische Function, Kronecker). Если въ уравненіи (1) § 5 положить

$$y = \frac{z}{f(\overset{m}{x_0})} \tag{5}$$

и затѣмъ освободить отъ знаменателей, то оно обратится въ такое:

$$(6)\quad \begin{gathered} z^n + f_1(\overset{m}{x})z^{n-1} + f_2(\overset{m}{x})f_0(\overset{m}{x})z^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(\overset{m}{x})\,[f_0(\overset{m}{x})]^{n-2}z + \\ + f_n(\overset{m}{x})\,[f_0(\overset{m}{x})]^{n-1} = 0, \end{gathered}$$

откуда видно, что z будетъ цѣлая функція x. Такимъ образомъ, съ помощью подстановки (5) вопросъ объ изслѣдованіи свойствъ алгебраической функціи y сводится на изслѣдованіе свойствъ *цѣлой* алгебраической функціи z. Это сдѣлалъ Кронекеръ въ своемъ интересномъ мемуарѣ о дискриминантѣ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 91. S. 301) и пришелъ чисто алгебраическимъ путемъ къ выводу интересныхъ свойствъ его; но для нашей цѣли этого не требуется. Мы замѣтимъ только, что подстановка (5) показываетъ намъ, что функція y будетъ обращаться въ безконечность всегда конечнаго порядка, ибо если α есть k-кратный корень уравненія (3) § 5, то изъ (5) будетъ слѣдовать, что

$$(7)\qquad \text{пред.}(x-\alpha)^k y_{\,x=\alpha} = \text{пред.} \left.\frac{z}{\dfrac{f_0(x)}{(x-\alpha)^k}}\right|_{x=\alpha} = \frac{z_{x=\alpha}}{\dfrac{f_0^{(k)}(\alpha)}{k!}},$$

гдѣ $z_{x=\alpha}$ будетъ величина конечная, ибо z цѣлая функція.

8. Пусть $x^{(0)}$ обыкновенная точка (слѣд., отлична отъ корней уравненій (3) и (9) § 5); тогда значенію $x = x^{(0)}$ будетъ отвѣчать *n различныхъ, конечныхъ* значеній y, которыя означимъ такъ:

$$(1)\qquad y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ y_3^{(0)},\ \ldots.\ y_n^{(0)};$$

всѣ разности

$$(2)\qquad y_i - y_j$$

будутъ конечныя величины, отличныя отъ нуля въ точкѣ $x^{(0)}$. Если x изъ $x^{(0)}$ перемѣстится безконечно мало, получитъ, слѣд., приращеніе $dx^{(0)}$, то каждое изъ значеній y_i получитъ безконечно малое приращеніе, главная часть котораго будетъ:

$$(3)\qquad dy_i^{(0)} = \left(-\frac{\partial F(x^{(0)}, y_i^{(0)})}{\partial x^{(0)}} : \frac{\partial F(x^{(0)}, y_i^{(0)})}{\partial y_i^{(0)}}\right) dx^{(0)};$$

слѣд., всѣ значенія y будутъ непрерывныя функціи x вблизи $x^{(0)}$, и, какъ это любая изъ обыкновенныхъ точекъ, то всѣ значенія y будутъ конечными и непрерывными функціями x, а слѣд., и ихъ разности $y_i - y_j$, которыя притомъ будутъ отличны отъ нуля, пока x не придетъ

въ одну изъ особенныхъ точекъ: тамъ нѣкоторыя изъ этихъ разностей могутъ обратиться либо въ нуль, либо въ безконечность, и, слѣд., при дальнѣйшемъ движеніи x можетъ возникнуть сомнѣніе на счетъ того, какой рядъ значеній изъ дѣлающихся въ этой точкѣ равными считать продолженіемъ предыдущаго ряда значеній, ибо нѣсколько примыкаетъ къ нему по закону непрерывности. Вотъ почему точки, гдѣ нѣсколько значеній дѣлаются равными, называются критическими; вотъ почему также онѣ названы Риманомъ точками развѣтвленія: здѣсь нѣсколько рядовъ значеній y становятся продолженіями предыдущихъ по закону непрерывности.

9. Если x, описавъ сомкнутую кривую, незаключающую внутри себя ни одной изъ критическихъ точекъ, вернется въ $x^{(0)}$, то и каждое изъ значеній y_i вернется въ свое начальное по закону непрерывности, ибо ни одна изъ разностей $y_i - y_j$ на всемъ пути x не обратится въ нуль. Если же внутри сомкнутаго пути будетъ находиться точка развѣтвленія, то по приходѣ въ $x^{(0)}$ вмѣсто $y_i^{(0)}$ можетъ получиться $y_j^{(0)}$, если въ этой критической точкѣ дѣлаются $y_i = y_j$; ибо такой путь чрезъ непрерывное измѣненіе можетъ быть сдѣланъ безконечно-близко идущимъ около разсматриваемой точки развѣтвленія, и тогда возможенъ будетъ переходъ по закону непрерывности одного корня y въ другой изъ дѣлающихся въ ней равными. Такимъ образомъ, послѣ обхода точки развѣтвленія въ точкѣ $x^{(0)}$ вмѣсто ряда значеній (1) § 8 можемъ получить другой:

$$y_{i_1}^{(0)},\ y_{i_2}^{(0)},\ y_{i_3}^{(0)},\ \ldots y_{i_n}^{(0)}, \qquad (1)$$

который будетъ состоять однако изъ тѣхъ же самыхъ элементовъ, какъ сейчасъ упомянутый, — такъ какъ другихъ значеній въ точкѣ $x^{(0)}$ функція y не можетъ имѣть, — въ другомъ только порядкѣ. Эффектъ обхода точки развѣтвленія выразится такимъ образомъ подстановкою:

$$\begin{pmatrix} y_{i_1}^{(0)} & y_{i_2}^{(0)} & y_{i_3}^{(0)} & \ldots. & y_{i_n}^{(0)} \\ y_1^{(0)} & y_2^{(0)} & y_3^{(0)} & \ldots. & y_n^{(0)} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Здѣсь, если $y_h^{(0)}$ переходитъ само въ себя, будетъ $i_h = h$; но невозможно, чтобы это было во всѣхъ критическихъ точкахъ для всякаго h; ибо въ такомъ случаѣ каждое y_h, возвращаясь постоянно само въ себя, каковъ бы ни былъ путь точки x, было бы однозначною функціей x, конечною и непрерывною, за исключеніемъ нѣкоторыхъ полюсовъ, слѣд., раціональной функціей x:

$$y_h = \varphi_h(x); \qquad (3)$$

но тогда мы имѣли бы

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = f_0(x) \prod_{h=1}^{h=n} (y - \varphi_h(x)), \tag{4}$$

гдѣ всѣ множители были бы раціональные; слѣд., уравненіе $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ не было бы неприводимымъ вопреки предположенію. Итакъ, непремѣнно хотя нѣкоторымъ изъ критическихъ точекъ будутъ принадлежать подстановки вида (4), гдѣ хотя для нѣкоторыхъ значеній h не будетъ $i_h = h$. Вся совокупность такихъ подстановокъ съ составными изъ нихъ, получающимися вслѣдствіе обходовъ заразъ нѣсколькихъ точекъ развѣтвленія, образуетъ *транзитивную группу*, т. е. допускающую переходъ любого изъ значеній y въ точкѣ $x^{(0)}$ въ каждое изъ прочихъ его значеній въ этой точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы группа корней:

$$y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots\ y_p^{(0)}, \tag{5}$$

гдѣ $p < n$, обладала свойствомъ, что всякій путь переводилъ бы каждый изъ членовъ этого ряда всегда въ одинъ изъ членовъ этого же самаго ряда, то всякая симметрическая функція величинъ (5) была бы однозначною функціей x, и какъ она непрерывна за исключеніемъ нѣкоторыхъ полюсовъ, то она была бы раціональной функціей x; слѣд., можно было бы составить уравненіе степени p относительно y съ раціональными относительно x коэффиціентами, которому удовлетворяли бы эти значенія y: но корни неприводимаго уравненія степени n относительно y не могутъ удовлетворять никакому уравненію степени низшей; слѣд., наше предположеніе на счетъ группы (5) ведетъ къ противорѣчію, и потому должно быть отброшено.

10. Всякая подстановка вида (2) пред. § можетъ быть разложена на рядъ круговыхъ: стоитъ только писать послѣ каждаго элемента тотъ, который его замѣщаетъ въ данной подстановкѣ, начавши съ любого, до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ тому, съ котораго начали; тогда, взявъ любой изъ невошедшихъ въ этотъ циклъ элементовъ, поступаемъ съ нимъ точно также, т. е. пишемъ послѣ него тотъ, который его замѣщаетъ въ разсматриваемой подстановкѣ, и такъ далѣе, до тѣхъ поръ, пока не вернемся къ нему же, продолжая это до тѣхъ поръ, пока не обойдемъ всѣ элементы данной подстановки. Если элементъ замѣщается самимъ собою, то онъ одинъ составитъ цѣлый циклъ. Каждый циклъ пишется въ отдѣльныхъ скобкахъ. Такъ, напр., подстановка:

$$\begin{pmatrix} y_2\, y_3\, y_4\, y_1\, y_8\, y_9\, y_6\, y_5\, y_7\, y_{10} \\ y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5\, y_6\, y_7\, y_8\, y_9\, y_{10} \end{pmatrix} = (y_1\, y_2\, y_3\, y_4)\,(y_5\, y_8)\,(y_6\, y_9\, y_7)\,(y_{10}) \tag{1}$$

состоитъ изъ цикловъ перваго, второго, третьяго и четвертаго порядка — по числу буквъ цикла. Циклъ изъ двухъ буквъ, (какъ $(y_5\, y_8)$), называется *переложеніемъ* (transposition). Всякій другой циклъ равносиленъ послѣдовательности переложеній въ числѣ, на единицу меньшемъ порядка цикла. Въ виду этого можемъ сказать, что *для каждой точки развѣтвленія имѣется свое распредѣленіе корней, дѣлающихся въ ней равными, на группы переходящихъ, при обходѣ этой точки по безконечно-малому кругу, одинъ въ другой въ круговомъ порядкѣ.* Зная точки развѣтвленія и круговыя группы для каждой, можно всегда указать, съ какимъ значеніемъ y вернется въ исходную точку $x^{(0)}$, когда вышли изъ нея съ $y_0^{(0)}$, какъ скоро будетъ дана форма пути, описаннаго точкою x. Въ самомъ дѣлѣ, всякій путь отъ точки $x^{(0)}$ до точки X чрезъ непрерывную постепенную деформацію, произведенную такимъ образомъ, чтобы при этомъ путь не переходилъ ни черезъ которую изъ критическихъ точекъ, можетъ быть приведенъ къ нѣкоторой опредѣленной послѣдовательности обходовъ нѣкоторыхъ изъ критическихъ точекъ по путямъ опредѣленнаго вида, именно: изъ $x^{(0)}$ по прямой къ точкѣ очень близкой къ критической, вокругъ этой критической точки по безконечно-малому кругу, описанному изъ нея какъ центра, и назадъ по прежней прямой въ точку $x^{(0)}$; напослѣдокъ же изъ $x^{(0)}$ въ конечную точку пути, X, по прямой линіи, или кривой, но неокружающей уже критическихъ точекъ; для сомкнутаго пути $X = x^{(0)}$, и этой послѣдней части пути не существуетъ. Только что описанные обходы разсматривалъ уже Коши, особенно же Клебшъ и Горданъ, которые ихъ называли *Schleife*, и Бріо и Букэ, которые ихъ называли *lacet*. Каждый такой путь или не оказываетъ вліянія на значеніе y, — это, если разсматриваемое значеніе само одно составляетъ циклъ, или же переводитъ въ опредѣленное другое, входящее съ нимъ въ одинъ циклъ въ принадлежащей разсматриваемой точкѣ подстановкѣ. Мы будемъ называть эти послѣдніе обходы *элементарными*.

11. *Риманъ* придумалъ особаго рода многолиственную поверхность, на которой алгебраическая функція y, опредѣляемая даннымъ уравненіемъ, (1) § 5, была бы однозначна. Возьмемъ n совпадающихъ плоскостей, какъ бы n положенныхъ одинъ на другой листовъ бумаги, и примемъ въ каждомъ за оси, какъ вещественной — такъ и мнимой части x прямыя, лежащія одна надъ другой; отмѣтимъ въ каждомъ листѣ точку $x^{(0)}$ и пріурочимъ къ каждому листу въ этой точкѣ одно изъ значеній $y_i^{(0)}$, напр. въ первомъ $y_1^{(0)}$, во второмъ $y_2^{(0)}$, ... наконецъ, въ n-омъ $y_n^{(0)}$; затѣмъ отмѣтимъ всѣ точки развѣтвленія и скрѣпимъ между собою въ нихъ мысленно листы, отвѣчающіе тѣмъ изъ значеній y, которыя дѣлаются между собою равными и составляютъ одинъ циклъ переходящихъ одинъ въ другой въ круговомъ порядкѣ; послѣ того проведемъ общій прорѣзъ чрезъ всѣ n листовъ отъ каждой точки развѣтвленія по линіямъ, непересѣкающимъ ни себя, ни другъ друга, идущимъ отъ точки развѣтвленія до безконечности; затѣмъ соединяемъ края разрѣзовъ: правый каждаго листа съ лѣвымъ того изъ другихъ, на которомъ y будетъ имѣть то же самое значеніе. Такъ, для примѣра (1) § 10 соединяемъ правый край перваго листа съ лѣвымъ второго, правый второго съ лѣвымъ третьяго, правый третьяго съ лѣвымъ четвертого, и правый четвертаго съ лѣвымъ перваго; далѣе правый пятаго съ лѣвымъ восьмого, и наоборотъ; потомъ правый шестого съ лѣвымъ девятаго; правый девятаго съ лѣвымъ седьмого, и правый седьмого съ лѣвымъ шестого; наконецъ, правый десятаго съ лѣвымъ его же. Это потому, что если мы съ лѣвой стороны перваго перейдемъ по пути, идущему отъ разсматриваемой точки вдоль разрѣза по лѣвой его сторонѣ до разсматриваемой точки развѣтвленія, вокругъ нея по безконечно-малому кругу въ положительномъ направленіи (обратномъ движенію часовой стрѣлки), затѣмъ оттуда по правой сторонѣ въ точку противоположную начальной, то придемъ туда съ y_2, если вышли съ y_1; съ y_3, если вышли съ y_2; съ y_4, если вышли съ y_3; съ y_1, если вышли съ y_4; слѣд., направо въ первомъ листѣ y будетъ имѣть то же значеніе, какъ во второмъ налѣво; направо во второмъ, какъ налѣво въ третьемъ, и т. д. Съ одного края разрѣза на другой въ томъ же листѣ чрезъ линію разрѣза нельзя попасть, ибо, переходя чрезъ линію разрѣза, спускаемся, или поднимаемся въ другой листъ. Эти линіи называются поэтому *переходными линіями*, тогда какъ исходныя точки, точки развѣтвленія функціи y, Риманъ называлъ *винтовыми точками* (Windungspunct) своей поверхности, ибо при обходѣ ихъ по кругу x спускается или поднимается изъ одного листа въ другой, какъ бы по винтовой лѣстницѣ. — На такой поверхности въ каждой точкѣ ея y будетъ имѣть одно опредѣленное значеніе: проведя изъ точки $x^{(0)}$ какую нибудь линію по этой поверхности въ точку X, мы придемъ въ точку X съ совершенно-опредѣленнымъ значеніемъ y, именно тѣмъ самымъ, которое пріурочено къ этой точкѣ въ томъ листѣ Римановой поверхности, въ которомъ лежитъ она. Этотъ путь можно чрезъ постепенное деформированіе привести къ опредѣленной послѣдовательности элементарныхъ обходовъ — lacets, идущихъ отъ $x^{(0)}$, взятаго въ одномъ листѣ, къ винтовой точкѣ, лежащей въ этомъ же листѣ, вокругъ нея переходя въ другой листъ, отъ нея назадъ по пути, лежащему въ этомъ второмъ листѣ подъ первымъ, въ точку $x^{(0)}$ этого второго листа; оттуда къ слѣдующей винтовой точкѣ въ томъ же листѣ, вокругъ нея въ новый листъ, оттуда въ этомъ новомъ листѣ по пути, лежащему подъ предыдущимъ, въ $x^{(0)}$ этого новаго листа и такъ далѣе, наконецъ, въ послѣднемъ листѣ изъ x_0 въ X того же листа. Такимъ образомъ, дѣйствительно на построенной нами *Римановой поверхности* наша функція y будетъ однозначная функція независимой перемѣнной x.

12. Вообразимъ теперь сферу, состоящую изъ n листовъ, діаметра равнаго единицѣ, каждый листъ которой касается въ точкѣ $x=0$ (точка O) къ соотвѣтственному листу Римановой плоской поверхности пред. § (которую предположимъ горизонтальною), такъ что внутренній листъ сферы къ нижнему, второй ко второму, ... верхній къ верхнему. Проведя діаметръ OO' чрезъ точку касанія, перенесемъ по прямымъ, соединяющимъ съ точкою O' сферы, діаметрально противоположной точкѣ касанія, точки Римановой поверхности на сферу въ соотвѣтственный листъ ея. Винтовыя точки перейдутъ въ опредѣленныя точки сферы; отъ нихъ по линіямъ сферическимъ, въ которыя перейдутъ переходныя линіи Римановой поверхности, сдѣлаемъ прорѣзы чрезъ всѣ листы сферы, а затѣмъ соединимъ правый край каждаго разрѣза съ лѣвымъ другого, какъ то было сдѣлано на плоскости; мы получимъ тогда *Риманову многолиственную сферу*, построенную впервые Нейманомъ, съ винтовыми точками и переходными линіями. На сферѣ переходныя линіи сойдутся въ точкѣ O', которая не смотря на то можетъ оказаться обыкновенною, — если въ каждомъ изъ листовъ сферы точка x послѣ обхода точки O' возвращается въ тотъ же листъ, и винтовою, — если въ нѣкоторыхъ листахъ взятая послѣ обхода она окажется въ другомъ листѣ. Въ обоихъ случаяхъ точка O' Римановой сферы можетъ оказаться и полюсомъ функціи y, если для $x=\infty$ нѣкоторыя изъ значеній y обращаются въ безконечность. — Если вообразимъ въ точкѣ O' сферы касательную плоскость, состоящую тоже изъ n листовъ, и касающихся верхній къ внутреннему листу сферы, второй ко второму и т. д. по порядку, и на эту многолиственную плоскость перенесемъ точки со сферы по прямымъ, соединяющимъ ихъ съ точкою O, то послѣ перенесенія и разрѣзовъ и пересоединеній листовъ, какъ то было выше дѣлаемо, получимъ *антиподную Риманову плоскую поверхность*, какъ называетъ ее Нейманъ, на которой легко изслѣдовать ходъ измѣненія функціи для безконечно-большихъ значеній x. Этому переходу съ горизонтальной Римановой поверхности на поверхность антиподовъ отвѣчаетъ преобразованіе уравненія съ помощью подстановки $x=\frac{1}{x'}$. На поверхности антиподовъ переходныя линіи образуютъ звѣзду, лучи которой изъ точки O' идутъ къ винтовымъ точкамъ.

13. Если точка O' окажется винтовою, то можно построеніе Римановой поверхности сдѣлать и такимъ образомъ. Выберемъ какую либо изъ обыкновенныхъ точекъ, пусть a, и соединимъ ее съ каждою изъ точекъ развѣтвленія функціи, лежащихъ въ конечномъ, и проведемъ также линію въ безконечность; затѣмъ сдѣлаемъ по этимъ линіямъ прорѣзы чрезъ всѣ n листовъ и соединимъ листы вдоль этихъ разрѣзовъ, какъ то выше было сдѣлано: мы получимъ тогда плоскую Риманову