АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени В. А. СТЕКЛОВА

XI

ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE STEKLOFF

Б. Н. ДЕЛОНЕ и Д. К. ФАДДЕЕВ

ТЕОРИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА • 1940 • ЛЕНИНГРАД

Ответственный редактор
акад. *И. М. ВИНОГРАДОВ*

Редактор издательства *З. Н. Перля*

Технический редактор ***О. Н. Персиянинова*** **Корректор** ***А. С. Шамбан***

Сдано в набор 5/VII 1939 г. Подписано к печати 11/V 1940 г. Формат 70 × 108/16. Объем 21¼ п. л. и 4 вкл. Учетно-издат. л. 34.1. В 1 п. л. 63 000 печ. зн. Тираж 1000 экз. Уполн. Главлита № А-24263. Рисо № 945. АНИ № 1247. Заказ № 3033.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большая часть современной теории алгебраических чисел рассматривает вопросы, простейший, но уже не тривиальный, пример которых мы находим в теории квадратичных иррациональностей, данной еще Гауссом в „Disquisitiones arithmeticae". Сюда относятся: теория единиц, теория идеалов, законы взаимности, а следовательно, отчасти, и теория поля классов.

Подробное изучение теории алгебраических иррациональностей третьей степени интересно не только потому, что оно дает следующий по сложности за квадратичным случаем пример на все эти задачи, для решения которых и в этом случае еще можно дать вполне удобные алгорифмы, а главным образом потому, что оно ставит некоторые дальнейшие вопросы, которые в квадратичном случае еще столь тривиальны, что при изучении его не стали перед исследователем. Сюда относятся, в первую очередь, вопросы классификации кубических иррациональностей, так называемая обратная задача теории Галуа для этих иррациональностей, и вопрос о приближении рациональными числами к иррациональностям высших степеней, в полной мере не решенный до сих пор и тесно связанный с вопросом о представлении чисел неполными (т. е. такими, у которых число переменных меньше их степени) разложимыми формами. Эти оба капитальных вопроса впервые в нетривиальной форме появляются в теории кубических иррациональностей, но дальше имеют место для иррациональностей любой степени.

До сих пор в математической литературе не существует монографии по теории кубических иррациональностей. Наша книга заполняет этот пробел.

Весьма естественно, что эта монография издается нашей Академией Наук, так как большое число исследований по теории иррациональностей третьей степени принадлежит математикам, так или иначе связанным с нашей Академией: Е. Золотареву, А. Маркову, Г. Вороному, мне, В. А. Тартаковскому, Д. К. Фаддееву, Б. А. Венкову и О. К. Житомирскому. Важнейшие исследования иностранных математиков, сюда относящиеся, принадлежат Эйзенштейну, Туэ, Морделлю, Нагелю, А. Вейлю и Зигелю, а также Дедекинду и Гассе. Исследования этих двух последних математиков мы не включили в монографию, так как они гетерогенны ей по методу и представляют собою скорее применение общей теории поля классов к частному случаю кубического поля.

Можно надеяться, что из соображений, подобных рассмотренным в I и III главах, удастся построить теорию, близкую к теории поля классов, которая даст возможность разрешать многие вопросы, разрешаемые при помощи теории поля классов, без применения аналитической теории чисел.

Мы с Д. К. Фаддеевым являемся равноправными соавторами этой книги, и примерно половина материала, в ней содержащегося, принадлежит Д. К. Фаддееву. Каждый параграф обсуждался обыкновенно сначала совместно, а затем каждый из нас просматривал параграфы, написанные другим. Параграфы 7, 8, 9, 12, 19, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 64, 70, 72, 73, 74, 79, 80, 81, 82 написаны Д. К. Фаддеевым, параграфы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 71, 75, 76, 77, 78 написаны мною. За написание § 69 мы очень обязаны проф. В. А. Тартаковскому.

План и замысел книги в основном принадлежит мне, но благодаря неоценимому сотрудничеству Димитрия Константиновича, который отдавал все свое увлечение нашей работе, удалось осуществить значительно более обширный план, чем тот, который мы намечали сначала, когда начинали писать эту книгу совместно с Нагелем. Специально для этой книги мы с Д. К. Фаддеевым произвели многие исследования, которых нехватало среди имевшихся результатов по теории иррациональностей 3-й степени,— сюда относится многое помещенное в I и III главах, а также многое другое.

Перейду к краткому изложению содержания отдельных глав.

Глава I заключает в себе возможно более полное и последовательное геометрическое изложение теории алгебраических иррациональностей любых степеней, рассматриваемой, по моему предложению, как теория решеток в n-мерном комплексном пространстве K_n, повторяющихся умножением. Она является как бы введением ко всей книге. Такие решетки несколько общее, чем алгебраические поля, и связаны с их прямыми суммами, но они нам нужны в главе III для решения задачи, обратной задаче теории Галуа для полей 3-й и 4-й степени. Геометрический характер изложения в главе I принят потому, что он нам необходим в III и особенно в IV главе. В I главе сначала (§ 2) рассматривается предлагаемое мною доказательство теоремы о существовании бесконечного числа независимых неприводимых алгебраических иррациональностей данного измерения и сигнатуры. Идея рассмотреть при вычислении объема $Q^*(r)$ аффинное преобразование с коэффициентами растяжения $r, r^2, \ldots, r^n$ по осям принадлежит студенту МГУ Е. Вегеману. Далее (§ 3) дана геометрия теории Галуа, разрабатываемая мною [19].[1] § 4 содержит чисто геометрическое изложение теории единиц Дирихле, а в § 5 помещены исследования Минковского из „Diophantische Approximationen“ геометрии теории идеалов (это единственный параграф предлагаемой геометрической теории алгебраических чисел, имевшийся до сих пор в литературе). Теорема 1 § 5 принадлежит Д. К. Фаддееву. § 6 посвящен изложению теории n-мерных побочных решеток, предложенных Клейном, являющейся некоторым углублением теории идеалов. Частный случай для $n=2$ рассмотрен Клейном [27] в его известных лекциях по теории чисел, а случай $n=3$ был предметом докторской диссертации Фуртвенглера [63]. Как теория единиц, так и теория идеалов излагаются в I главе сразу для самой произвольной n-мерной максимальной решетки, хотя бы и приводимой. §§ 7, 8 и 9 содержат теорию различных форм, связанных с решетками в K_n. Мое предложение рассматривать обобщенные безутианы возникло в связи с нашей общей с И. Соминским и К. Биллевичем мыслью при табуляризации полей 4-й степени [18] (см. § 40) проектировать поле параллельно подполю. Рассматривать решетку, взаимную с данной, и соответственно форму, полярную данной разложимой, предложил Д. К. Фаддеев [60]. Эта форма представляет собою также очень важное алгорифмическое подспорье, в чем можно убедиться в § 64.

Глава I может быть полезна для желающего изучать теорию алгебраических чисел, так как содержит довольно полное и последовательное изложение основных фактов теории.

Глава II заключает в себе элементы теории алгебраических полей 3-й степени. Она изложена, в противовес главе I, чисто алгебраически и может быть читаема независимо от прочтения главы I. В главе II мы даем везде самые удобные вычислительные алгорифмы, которые мы знаем, для фактического вы-

---

[1] Цифры, помещенные в прямоугольные скобки рядом с именем автора, относятся к списку литературы; если такой скобки нет, то это значит, что указываемое исследование появляется в этой книге впервые.

полнения вычислений, в ней рассматриваемых, и иногда даже сопровождаем их численными примерами. В § 11 я предлагаю одну формулу для непосредственного возвышения кубического числа в любую степень; способ извлечения корня предложен Фаддеевым, он удобен для проверки, основная ли данная единица или нет, а также используется в § 49 для решения задачи, обратной задаче Чирнгаузена, для двух уравнений 4-й степени. В § 13 дано мое [15] решение этой задачи для двух уравнений 3-й степени. § 15 содержит теорию, развитую Ф. Леви [28] и мною [15]. В § 16 изложен мой [15] способ решения задачи эквивалентности для двух кубических двойничных форм без теории приведения. § 17 содержит изложение известного способа Вороного [8] для вычисления базиса кубического поля; способа, бывшего главным результатом его магистерской диссертации, § 18 — алгорифм разложения простого числа на простые идеалы в поле n-го порядка по Золотареву [26] и, в частности, в кубическом поле.

Глава III. В §§ 26—30 и 37—41 дана непосредственная табуляризация решеток, повторяющихся умножением, а следовательно и полей 3-й и 4-й степеней всех сигнатур. Параграфы эти оканчиваются таблицами таких решеток. Табуляризация колец 3-й степени положительного дискриминанта была впервые произведена Арндтом [1—4] в 1852 г., по идее Эйзенштейна [21], как табуляризация классов двойничных кубических форм. Аналогичная табуляризация для отрицательного определителя была произведена Метьюсом (Mathews) и Бервиком [30, 31] и иначе мною [15]. Табуляризация колец 4-й степени с сигнатурой (числом пар комплексных корней) $\tau = 0$ была произведена мной, И. Соминским и К. Биллевичем [18], а для $\tau = 1$ таблица была вычислена Ч. Поплавским. §§ 32—35 содержат геометрию кубических двойничных форм; теория приведения была разработана Метьюсом [30, 31] и мною, рассмотрение кубических двойничных форм как норм принадлежит Фаддееву. Теорема § 36 была доказана Тартаковским еще в 1919 г. в связи с появившимся у нас с ним предположением, возникшим из рассмотрения обширной таблицы дискриминантов кубических единиц, вычисленной в 1918 г. для меня при помощи арифмометров студентами Киевского университета; эта теорема до сих пор осталась нигде не опубликованной.

Относительно классификации кубических областей по квадратичным и областей 4-й степени по кубическим должен сказать следующее. Эйзенштейн в 1841 г. [21] дал любопытную классификацию кубических двойничных форм по их квадратичным ковариантам, которая была затем усовершенствована в работах Арндта [1—4]. На моих семинарах в Ленинградском университете я не раз указывал, что эта теория Эйзенштейна может быть, во-первых, рассматриваема как классификация кубических колец по квадратичным областям, во-вторых, геометризирована и, в-третьих, обобщена на области высших порядков. Б. А. Венков впоследствии [6] переизложил классификацию Эйзенштейна на язык теории алгебраических чисел, а О. К. Житомирский [24] закончил ее геометризацию, а именно, указал как надо выбирать оси в пространстве проекции, и после этого мне удалось уже сообразить, в чем состоит обобщение этой теории на области 4-й степени. Подробно обобщение на области 4-й степени проделал Д. К. Фаддеев [59]. В настоящее время я и Фаддеев [62] строим эту теорию для полей любой степени. Если считать прямою задачею теории Галуа нахождение всех алгебраических свойств заданного поля в зависимости от его группы Галуа, а обратною — нахождение по данной группе всех полей, имеющих ее своей группой Галуа, то излагаемая в §§ 42—53 теория является полным решением обратной задачи теории Галуа для полей 3-й и 4-й степеней. Мы приводим здесь эту теорию (в весьма тщательной и подробной обработке Фаддеева) и для полей 4-й степени, так как их классификация основана на рассмотрении полей 3-й степени, и даже, что весьма любопытно, на рассмотрении общих трехмерных решеток, повторяющихся умножением (т. е. также и приводимых), и их побочных решеток.

Глава IV посвящена алгорифму Вороного для вычисления автоморфизмов умножения полей 3-й степени. Сначала мы думали дать все существующие для этой цели алгорифмы: Золотарева [25], Минковского [33], Шарва (Charve) [67]; Вороного [9], Бервика [5] и Успенского [55], однако затем предпочли изложить только алгорифм Вороного, как являющийся самым глубоким. Случай $D>0$ обработан Д. К. Фаддеевым, а случай $D<0$ мною (см. также мою заметку [16]). В § 64 дана (усовершенствованная Д. К. Фаддеевым) переработка алгорифма Вороного для $D<0$, предложенная мною на съезде в Харькове, такая, что приходится вычислять только с целыми рациональными числами. Должен сказать, что Д. К. исключительно изящно усовершенствовал мои вычисления, заметив, что лучше всего преобразовывать параллельно данную тройничную кубическую разложимую форму и ей полярную. Он же ввел треугольный символ для тройничной кубической разложимой формы.

Глава V содержит изложение теоремы Туэ. Основные мысли изложения, данного в §§ 65, 66, 68, принадлежат В. А. Тартаковскому (см. [17]), ему же принадлежит термин: „заградительный ряд". § 69 и приводимый в нем результат принадлежат В. А. Тартаковскому; этот результат, существенно дополняющий результат Туэ, до сих пор не был опубликован.

В § 70 дан результат Зигеля [46], полученный им из соображений, близких к соображению Туэ, в оригинальной переработке Фаддеева, носящей геометрический и значительно более элементарный характер (не используются гипергеометрические разложения и связанные с ними оценки). Более тщательное проведение оценок позволило дать несколько более сильный результат: 15 решений вместо 18. Этот результат является обобщением моей теоремы § 75 на случай положительного дискриминанта. Надо думать, что граница 18 по Зигелю или 15 по Фаддееву для числа решений — не точная (моя граница 5 для случая отрицательного дискриминанта — точная).

Глава VI заключает в первой своей части, в §§ 71, 75, 76, мои исследования [11—14] о представлении чисел кубическими двойничными формами отрицательного определителя и (в конце § 75) добавление Нагеля [42] к моей работе [12], а в §§ 72, 73, 74 — продолжения моего исследования [11], данные Д. К. Фаддеевым [57, 61]; теорема Нагеля [40] содержится в этих исследованиях как частный случай. Во второй части главы VI помещено доказательство основной теоремы Морделля, данное А. Вейлем (André Weil) [7], и исследования Д. К. Фаддеева [58] об уравнении $x^3+y^3=Az^3$.

Термином „поле" мы обозначаем везде конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел. С точки зрения решеток, повторяющихся умножением, рассматриваемых в главе I, поле представляет собою совокупность одноименных координат всех точек некоторой неприводимой решетки, повторяющейся умножением, и этих же координат частных, получающихся от деления ее точек друг на друга. Аналогичную совокупность координат в том случае, если решетка, повторяющаяся умножением, может быть и приводима, мы называем „областью".

Б. Делоне

ЛИТЕРАТУРА

1. Arndt. Versuch einer Theorie der homogenen Functionen des dritten Grades mit zwei Variabeln. Archiv d. Math. und Phys., 17. 1851.
2. — Untersuchungen über die Anzahl der cubischen Klassen, welche zu einer determinierenden quadratischen Klasse gehören. Archiv d. Math. und Phys., 19, 1852.
3. — Tabellarische Berechnung der reducierten binären kubischen Formen und Klassification derselben. Archiv d. Math. und Phys., 31, 1858.
4. — Zur Theorie der binären kubischen Formen. Journ. f. Math., 53, 1857.
5. Berwick. An algorithm for finding units in cubic fields of negative discriminant. Proc. of the London Math. Soc., 1913.
6. Венков. Классификация кубических областей по квадратичным. Труды II Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде в 1934 г.
7. Weil A. Sur un théorème de Mordell. Bull. Sci. Math., 2 Ser., t. 54, 1930.
8. Вороной. О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-ей степени. СПб. 1894.
9. — Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава, 1896.
10. Dedekind. Ueber reine cubische Körper. Journ. f. Math., 121, 1900.
11. Делоне. Решение неопределенного уравнения $X^3q + Y^3 = 1$. Изв. Ак. Наук 1922.
12. — О числе представлений числа кубической двоичной формой отрицательного определителя. Изв. Ак. Наук 1922.
13. — Math. Z. Bd. 28 и 31, перевод работ 11 и 12.
14. — Ueber den Algorithmus der Erhöhung. Журн. Лен. М. О. 1927.
15. — Решение задачи эквивалентности и табуляризация кубических двоичных форм отрицательного определителя. Журн. Лен. М. О. 1926.
16. — Interprétation géometrique de la généralisation de l'algorithme des fractions continues donné par Voronoï. C. R. 1923.
17. — О неопределенных уравнениях. Труды Всеросс. съезда мат. в Москве в 1927 г.
18. — Таблица чисто вещественных областей 4-го порядка совместно с И. Соминским и К. Биллевичем. Изв. Ак. Наук 1935.
19. — К геометрии теории Галуа. Юбилейный сборник Граве 1939.
20. Eisenstein. Théorème sur les formes cubiques... Crelle 27, 1844.
21. — Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln. Crelle, 27, 1844.
22. — Eigenschaft der Ansdrücke, welche bei der Anflösung cnbischer Gleichnngen erscheinen. Crelle 27, 1844.
23. — Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreisteilnng ihre Entstehnng verdanken. Crelle, 28, 1844.
24. Житомирский. Sur la classification des formes cubiques. Изв. Ак. Наук, 1935.
25. Золотарев. Об одном неопределенном уравнении 3-й степени. СПб. 1869.
26. — Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. СПб. 1874.
27. Klein. Ansgewählte Kapiteln der Zahlentheorie. Литограф. лекц. Göttingen 1896.
28. Levi F. Kubische Zahlkörper nnd binäre kubische Formenklassen. Berichte der Sächsischen Ges. d. Wiss. Bd. 66, 1914.
29. Марков. Snr les nombres entiers dépendants d'nne racine cubiqne d'nn nombre entier ordinaire. Mém. de l'Acad. de St. Petersbourg VII ser. t. 38.
30. Mathews a. Berwick. On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant. Proc. London. Math. Soc. 10, 1912.
31. — On the reduction and classification of binary cubics which have a negative determinant. Proc. London Math. Soc. 10, 1912.
32. Minkowski. Diophantische Approximationen. 1905.
33. — Zur Theorie der Kettenbrüche. Ges. Abh. u. Ann. de l'École Normale supérieure. 3 sér., t. XIII.
34. Mordell. Note on the integer solutions of the éqnation $Ey^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Messenger of Math., vol. 51, 1922.
35. — On the integer solntions of the equation $ey^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Proc. London Math. Soc., vol. 21, 1922.

36. Mordell. On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 21, 1922.
37. — Indeterminate equations of the third degree. Science Progress London, 1923.
38. Nagell. Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades. Skrifter Videnskapsselskapet, Cristiania, 1922.
39. — Ueber die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern. Ibid. 1923.
40. — Solution complète de quelques équations cubiques à deux indeterminées. Journ. de Math., 9 şer., t. 4, 1925.
41. — Ueber einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten. Math. Z. 24, 1925.
42. — Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Math. Z. 28, 1928.
43. — Zur Theorie der kubischen Irrationalitäten. Acta Math. 55, 1930.
44. — L'analyse indéterminée de degré supérieur. Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XXXIX, 1929.
45. Reid. Tafel der Klassenzahlen für kubische Zahlkörper. Diss. Göttingen, 1899.
46. Siegel. Ueber einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. der Preuss. Akad. der Wiss. 1929.
47. — Die Gleichung $ax^n - by^n = c$. Math. Ann. 114, 1937.
48. Тартаковский. Решение уравнения $x^4 - \rho y^4 = 1$. Изв. Ак. Наук 1926.
49. Thue. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Cristiania Videnskabsselscabs Skrifter, 1908.
50. — Ueber rationale Annäherungswerte der réellen Wurzeln der ganzen Functionen dritten Grades $x^3 - ax - b$. Ibidem 1908.
51. — Om en general i store wele tal ulösbar ligning. Ibidem 1908.
52. — Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Journ. für Math. 135.
53. — Eine Lösung der Gleichung $P(x) - Q(x) = (x - \rho)^n \cdot Pr(x)$ in ganzen Functionen P, Q und R für jede beliebige ganze Zahl, wenn ρ eine Wurzel einer beliebigen ganzen Function bedeutet. Vidensk. Skrifter, 1909.
54. — Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzen Functionen. Journ. für Math. 138.
55. Успенский. A method of finding unites in cubic orders of a negative discriminant. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 1931.
56. Фаддеев. Табуляризация областей и колец Галуа третьего порядка. Труды Физ.-Мат. инст. Ак. Наук СССР, т. V. 1934.
57. — Об уравнении $x^4 - Ay^4 = 1$ (ibidem).
58. — Об уравнении $x^3 + y^3 = Az^3$ (ibidem).
59. — Классификация алгебраических областей четвертого порядка по их кубическим резольвентам. Труды II Всес. съезда мат. в Ленинграде в 1934 г.
60. — Об одном свойстве группы классов идеалов областей третьей степени. Ibidem.
61. — Об одном классе неопределенных уравнений 3-й степени. Ibidem.
62. — Построение алгебраических областей, группой Галуа которых является группа кватернионов. Уч. зап. Л. Г. У. 1937.
63. Furtwängler. Kubische Zahlkörper und Zahlengitter. Diss. Göttingen.
64. Hasse. Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage. Math. Z. 31, 1930.
65. Чеботарев. Основы теории Галуа I и II.
66. — Задача, обратная задаче Чиргаузена. Вестн. чист. и прикл. знан. Одесса 1922.
67. Charve. De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du 3-me degré (Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup., supplément au t. 9 (2 série) 1880.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III

ГЕОМЕТРИЯ, ТАБУЛЯРИЗАЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ 3-й И 4-й СТЕПЕНИ

Глава IV

АЛГОРИФМ ВОРОНОГО

Глава V

ТЕОРЕМА ТУЭ

Глава VI

О НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ 3-Й СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ РЕШЕТОК, ПОВТОРЯЮЩИХСЯ УМНОЖЕНИЕМ

§ 1. Решетки в n-мерном комплексном пространстве, повторяющиеся умножением

Мы будем рассматривать n-мерное комплексное пространство K_n, т. е. будем считать точкой систему любых n комплексных чисел $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, которые будем называть координатами этой точки, причем номера координат мы везде будем обозначать верхними значками в скобочках. Самую же эту точку будем кратко обозначать той же буквой без верхних знаков. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ представляют n точек K_n, комплексно некомпланарных с началом, т. е. определитель из их координат

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \ldots & \omega_n^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \ldots & \omega_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{1}$$

не равен нулю. Условимся называть суммой, разностью, произведением и частным двух точек пространства K_n точку, каждая из координат которой есть сумма, разность, произведение или частное соответственных координат обеих рассматриваемых точек. Мы будем называть n-мерной решеткой в K_n, или просто решеткой в K_n, совокупность всех точек вида $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_n\omega_n$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — все возможные системы n целых рациональных чисел, т. е. совокупность всех точек K_n, получающихся сложением и вычитанием из точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Самую решетку эту мы будем обозначать $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ или $[\omega]$ и называть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ее базисом, или ее основным n-векторником. Бывают, оказывается, *решетки, которые повторяются умножением*, т. е. имеют то свойство, что произведение любых двух точек такой решетки есть опять точка этой же решетки. Целью настоящей главы является построение полной теории таких решеток.

Основными пунктами этой теории будут следующие. В настоящем параграфе мы покажем, что всякая такая решетка может быть дополнена до некоторой максимальной, т. е. такой решетки, которая дальше не может уже быть сгущена при условии сохранения свойства повторяться умножением; затем мы покажем, что всякая максимальная решетка либо сама *неприводима*, либо есть прямая сумма таких неприводимых решеток, каждая из которых уже не может быть дальше упрощена. В § 2 мы покажем, что для всякого числа измерений n и всякой *сигнатуры* τ существует бесконечно много различных неприводимых решеток. В § 3 мы построим теорию Галуа таких решеток. В § 4 рассмотрим теорию *автоморфизмов умножения* для произвольных решеток в K_n, т. е. существуют ли такие точки в K_n и каковы такие точки, после умножения на которые некоторой решетки в K_n решетка эта совмещается сама с собою. В §§ 5 и 6 мы построим теорию идеалов решеток, повторяющихся умножением, которая нам дальше понадобится в главе III в теории классификации полей

3-й и 4-й степени. В §§ 7, 8 и 9 мы рассмотрим разные формы, связанные с такими решетками.[1]

Точку пространства K_n, никакие две из координат которой не равны друг другу и у которой нет координат, равных нулю, мы будем называть **точкой общего положения** в K_n.

Лемма 1. *Во всякой решетке, построенной на n комплексно некомпланарных векторах K_n, существуют точки общего положения.*

Действительно, рассмотрим точку $\omega = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_n\omega_n$, построенную из $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ лексикографически, т. е. так, что целые рациональные коэффициенты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ весьма быстро растут, т. е. что всякий следующий коэффициент во много раз больше предыдущего. Рассмотрим, например, i-тую и k-тую координаты этой точки; они имеют вид:

$$\omega^i = u_1\omega_1^{(i)} + u_2\omega_2^{(i)} + \ldots + u_n\omega_n^{(i)}; \qquad \omega^k = u_1\omega_1^{(k)} + u_2\omega_2^{(k)} + \ldots + u_n\omega_n^{(k)}.$$

Предположим, что $\omega_n^{(k)} = \omega_n^{(i)}$; $\omega_{n-1}^{(k)} = \omega_{n-1}^{(i)}$; ...; $\omega_{l+1}^{(k)} = \omega_{l+1}^{(i)}$; но уже $\omega_l^{(k)} \neq \omega_l^{(i)}$. Все i-тые и k-тые координаты быть равны друг другу у всех n векторов не могут, так как тогда определитель (1) имел бы две одинаковые строки и был бы, против предположения, равен нулю. Мы видим, следовательно, что $\omega^{(k)} \neq \omega^{(i)}$, так как l-тые их слагаемые $u_l\omega_l^{(k)}$ и $u_l\omega_l^{(i)}$ у них не равны, все следующие за этими слагаемые у них равны нулю, а суммы им предшествующих во сколько угодно раз (если u_l достаточно быстро растут) меньше этих l-тых слагаемых. Равняться нулю какая-нибудь координата точки ω, например i-тая, тоже не может, так как, если $\omega_n^{(i)} = 0$, $\omega_{n-1}^{(i)} = 0$ ..., то будет наконец какая-нибудь $\omega_l^{(i)}$, не равная нулю, так как иначе определитель (1) имел бы строку, сплошь состоящую из нулей и должен был бы равняться нулю; но тогда все слагаемые $\omega^{(i)}$, следующие за $u_l u_l^{(i)}$, равны нулю, а сумма всех предыдущих во сколько угодно раз меньше этого l-того слагаемого, и, следовательно, координата $\omega^{(i)}$ не равна нулю.

Лемма 2. *Координаты точки ω решетки, повторяющейся умножением в K_n, суть все корни некоторого уравнения n-ой степени с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Если ω — точка общего положения, то все уравнения, которым удовлетворяют координаты других точек рассматриваемой решетки, повторяющейся умножением, получаются из уравнения, которому удовлетворяет ω, при помощи рациональных преобразований Чирнгаузена (Tschirnhausen).*

В виду того, что решетка повторяется умножением, мы имеем для любой ее точки ω как общего, так и не общего положения,

$$\begin{aligned}
\omega_1\omega &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + \ldots + a_{1n}\omega_n,\\
\omega_2\omega &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \ldots + a_{2n}\omega_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega_n\omega &= a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \ldots + a_{nn}\omega_n,
\end{aligned}$$

с целыми рациональными коэффициентами a_{ik}. (Здесь $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ суть точки базиса решетки.) Отсюда следует, что

$$F(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \omega, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

[1] Перед чтением этой I главы надо просмотреть *приложение* в конце главы I, содержащее необходимые леммы из теории вещественных решеток.

Полином $F(\omega)$ имеет целые рациональные коэффициенты, и старший его коэффициент равен 1. Если ω есть точка общего положения, то все ее n координат различны, и, следовательно, они суть *все* корни уравнения n-ой степени $F(\omega)=0$. Первое утверждение леммы доказано для точек общего положения. Переходим к доказательству второго утверждения.

Пусть ω — точка общего положения. Тогда векторы $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ некомпланарны, ибо определитель, составленный из их координат, есть определитель Вандермонда для координат точки ω, среди которых нет равных, и потому неравен нулю.

Все эти векторы, кроме вектора 1, принадлежат нашей решетке, вектор же 1 может решетке не принадлежать. Однако он является целой частью некоторого вектора, принадлежащего решетке, например вектора, все координаты которого равны свободному члену a_n уравнения

$$F(\omega)=\omega^n+a_1\omega^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

корнем которого является ω, ибо такой вектор есть линейная комбинация $-(\omega^n+a_1\omega^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\omega)$ с целыми коэффициентами векторов $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n$, заведомо принадлежащих решетке. Любой вектор $\tilde{\omega}$ решетки есть, следовательно, некоторая линейная комбинация векторов $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ с рациональными коэффициентами, т. е. имеет вид

$$\tilde{\omega}=\varphi(\omega)=b_1\omega^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\omega+b_n.$$

Координаты вектора $\tilde{\omega}$ суть, следовательно, корни уравнения $G(\tilde{\omega})=0$, получаемого из уравнения $F(\omega)=0$ преобразованием Чирнгаузена φ с рациональными коэффициентами, причем в с е корни преобразованного уравнения, и только они, образуют координаты точки $\tilde{\omega}$. Если $\tilde{\omega}$ — точка общего положения, то это уравнение не отличается от уравнения $\widetilde{F}(\tilde{\omega})=0$ (составленного для $\tilde{\omega}$ так же, как $F(\omega)$ для ω), так как оба уравнения имеют одинаковые корни. Каждую точку необщего положения можно рассматривать как предел последовательности точек общего положения и поэтому, из соображений непрерывности, уравнения $\widetilde{F}(\tilde{\omega})=0$ и $G(\tilde{\omega})=0$ также совпадают.

Лемма доказана полностью, ибо уравнение $\widetilde{F}(\tilde{\omega})$ имеет целые коэффициенты и старший коэффициент его равен 1.

Введем понятие о *сигнатурном пространстве*. Если уравнение $F(\omega)=0$ имеет σ вещественных корней и 2τ комплексно сопряженных, то и соответственные координаты любой точки $\tilde{\omega}$ рассматриваемой решетки вещественны и комплексно сопряженны. Таким образом, решетки, повторяющиеся в K_n умножением, бывают $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ сигнатурных типов: без комплексных координат, с одной парой комплексно сопряженных координат, с двумя парами, и т. д. Все решетки данного сигнатурного типа, или данной сигнатуры, у которых вещественны именно данные координаты и комплексно сопряженны именно данные пары координат точек K_n, лежат в одном и том же „сечении“ пространства K_n, которое характеризуется вещественностью и комплексной сопряженностью соответствующих координат. Это „сечение“ мы будем называть с и г н а т у р н ы м с е ч е н и е м пространства K_n. Если нумерация осей K_n выбрана так, что в рассматриваемом сигнатурном сечении вещественны первые σ координат $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\sigma)}$ точки, а комплексно сопряженны соседние пары остальных ее $n-\sigma=2\tau$ координат

$$\xi^{(1)}+i\eta^{(1)}, \quad \xi^{(1)}-i\eta^{(1)}, \quad \xi^{(2)}+i\eta^{(2)}, \quad \xi^{(2)}-i\eta^{(2)},$$
$$\ldots, \quad \xi^{(\tau)}+i\eta^{(\tau)}, \quad \xi^{(\tau)}-i\eta^{(\tau)},$$

то всякой такой точке можно сопоставить в вещественном n-мерном пространстве $R_{n,\tau}$ точку, с вещественными координатами $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\sigma)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \ldots, \xi^{(\tau)}, \eta^{(\tau)}$. Вещественное пространство $R_{n,\tau}$, так сопоставленное рассматриваемому сигнатурному сечению пространства K_n, мы будем называть *соответствующим* ему **сигнатурным пространством**. Переход от сигнатурного сечения к соответствующему ему вещественному сигнатурному пространству $R_{n,\tau}$ состоит собственно в соответственном выборе осей в пространстве K_n. А именно для этого надо оси координат, соответствующие тем σ из координат точек сигнатурного подпространства, которые вещественны, оставить теми же, которые были в K_n, а каждую пару осей K_n, соответствующую комплексно сопряженным координатам $x^{(i)}x^{(k)}$, заменить другой парой так, чтобы эти координаты заменялись на $\frac{x^{(i)}+x^{(k)}}{2}$, $\frac{x^{(i)}-x^{(k)}}{2i}$. Сумма, разность, произведение и частное двух точек одного и того же сигнатурного сечения пространства K_n есть, как легко видеть, опять точка того же сигнатурного сечения. В соответственном вещественном пространстве $R_{n,\tau}$ сложение и вычитание точек производится, очевидно, по тому же правилу, как в K_n, а именно, просто складываются или вычитаются соответственные координаты, т. е. сумме или разности двух точек K_n, лежащих в этом сигнатурном сечении, будет в $R_{n,\tau}$ соответствовать точка, координаты которой в $R_{n,\tau}$ суть просто суммы или разности соответственных координат складываемых точек. Точке же K_n, являющейся произведением двух точек K_n с координатами в $R_{n,\tau}$

$$\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \ldots, \zeta_1^{(\sigma)}, \xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \eta_1^{(2)}, \ldots, \xi_1^{(\tau)}, \eta_1^{(\tau)},$$

и

$$\zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \ldots, \zeta_2^{(\sigma)}, \xi_2^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \ldots, \xi_2^{(\tau)}, \eta_2^{(\tau)} \qquad (1)$$

соответствует в $R_{n,\tau}$ точка с координатами

$$\zeta_1^{(1)}\zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)}\zeta_2^{(2)}, \ldots, \zeta_1^{(\sigma)}\zeta_2^{(\sigma)}, \xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}-\eta_1^{(1)}\eta_2^{(1)}, \xi_1^{(1)}\eta_2^{(1)}+\xi_2^{(1)}\eta_1^{(1)},$$
$$\ldots, \xi_1^{(\tau)}\xi_2^{(\tau)}-\eta_1^{(\tau)}\eta_2^{(\tau)}, \xi_1^{(\tau)}\eta_2^{(\tau)}+\xi_2^{(\tau)}\eta_1^{(\tau)}. \qquad (2)$$

Таким образом, в зависимости от сигнатуры τ способ умножения точек в $R_{n,\tau}$ меняется.

Норма точки пространства K_n — произведение ее комплексных координат $N(\omega) = \omega^{(1)} \cdot \omega^{(2)} \cdot \ldots \cdot \omega^{(n)}$ — есть, вообще говоря, комплексное число; для точки же сигнатурного сечения норма есть число вещественное, и оно выражается через вещественные координаты соответственной точки $R_{n,\tau}$ так:

$$N(\omega) = \zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \ldots \zeta^{(\sigma)} \cdot (\xi^{(1)^2} + \eta^{(1)^2})(\xi^{(2)^2} + \eta^{(2)^2}) \ldots (\xi^{(\tau)^2} + \eta^{(\tau)^2}). \qquad (3)$$

Если n произвольных точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ в K_n лежат n-мерно с началом координат, т. е. комплексно линейно независимы, то неравный нулю определитель из их координат можно назвать комплексным объемом параллелепипеда, на них построенного, т. е. построенного на векторах, идущих из начала координат к этим точкам. Квадрат этого определителя называется **дискриминантом** системы точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ пространства K_n и обозначается $D[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$; это, вообще говоря, некоторое комплексное число. Если точки $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ лежат в одном и том же сигнатурном сечении, то мы имеем формулу (4) (стр. 17), и следовательно, если векторы, идущие в точки $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, в K_n комплексно некомпланарны, то и соответствующие им векторы в $R_{n,\tau}$ вещественно некомпланарны, и обратно. В частности система точек в соответствующем $R_{n,\tau}$, соответствующих точкам некоторой n-мерной решетки в K_n, повторяющейся умножением, есть, следовательно, n-мерная вещественная решетка в пространстве $R_{n,\tau}$.