Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

МЕХАНИКА
СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.
ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ,
мгновенныя силы и взаимные удары между твердыми тѣлами.

СОСТАВИЛЪ

Д. Бобылевъ,

Заслуженный Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1905.

Печатано по распоряженію Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Механика системы матеріальныхъ точекъ.

§ 1. Система матеріальныхъ точекъ. Связи. Сопротивленія связей.

Въ механикѣ матеріальной точки разсматривались и опредѣлялись положенія равновѣсія и движеніе одной матеріальной точки свободной или несвободной.

Такимъ же образомъ можно опредѣлять равновѣсіе и движеніе нѣсколькихъ матеріальныхъ точекъ, независимо одна отъ другой, если силы приложенныя къ каждой изъ точекъ, независятъ отъ координатъ другихъ точекъ. Тогда движеніе и равновѣсіе каждой изъ этихъ точекъ можетъ быть опредѣляемо отдѣльно, независимо отъ разсмотрѣнія движенія и равновѣсія другихъ точекъ.

Напримѣръ, положимъ, что имѣется двѣ тяжелыя матеріальныя точки M_1 (масса m_1) и M_2 (масса m_2). Обѣ остаются въ плоскости XY, причемъ сила тяжести, дѣйствующая на обѣ точки, направлена параллельно положительной оси Y-овъ. На точку M_2, кромѣ силы тяжести, дѣйствуетъ еще сила притяженія къ началу координатъ, пропорціональная разстоянію отъ него и равная $\mu^2 m_2 r_2$, гдѣ r_2 есть длина радіуса вектора OM_2, такъ что $r_2{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2$. Величины x_1, y_1, x_2, y_2 суть координаты первой и второй точки, g—ускореніе силы тяжести.

Дифференціальныя уравненія движенія 1-й точки:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = m_1 g$$

можно интегрировать независимо отъ дифференціальныхъ уравненій движенія второй точки:

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\mu^2 m_2 x_2, \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = m_2 g - \mu^2 m_2 y_2$$

и послѣднія—независимо отъ первыхъ. Можно еще замѣтить, что вторая точка можетъ находиться въ равновѣсіи на оси Y-овъ, въ точкѣ, имѣющей ординату

$$y_0 = \frac{g}{\mu^2}.$$

Какъ извѣстно изъ механики матеріальной точки, рѣшенія первыхъ дифференціальныхъ уравненій суть:

$$x_1 = C_1 t + C_2, \quad y_1 = g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

а вторыхъ

$$x_2 = C_5 \cos \mu t + C_6 \sin \mu t,$$

$$y_2 = y_0 + C_7 \cos \mu t + C_8 \sin \mu t.$$

Изъ механики матеріальной точки извѣстно, что первая точка совершаетъ движеніе по параболѣ, главная ось которой параллельна положительной оси Y, а вторая точка описываетъ эллипсъ, центръ котораго находится въ положеніи равновѣсія этой точки, т. е. имѣетъ координаты $x_2 = 0$ и $y_2 = y_0$.

Дѣло измѣнится весьма существенно, если между матеріальными точками будутъ дѣйствовать *силы взаимодѣйствія*. Напримѣръ, если въ предыдущемъ примѣрѣ, вмѣсто силы притяженія точки M_2 къ началу координатъ, будетъ дѣйствовать на нее притяженіе къ точкѣ M_1, равное $\mu^2 m_1 m_2 r_{12}$ и направленное къ точкѣ M_1, а на точку M_1 будетъ дѣйствовать притяженіе той же величины и направленное къ точкѣ M_2, гдѣ r_{12} есть величина разстоянія между этими точками, такъ что $r_{12}{}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, то дифференціальныя уравненія движенія этихъ точекъ будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (x_1 - x_2), \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (y_1 - y_2) + m_1 g, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (y_2 - y_1) + m_2 g, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

потому что напр. на точку M_1 дѣйствуетъ, кромѣ силы тяжести ея, еще притяженіе къ точкѣ M_2, равное по величинѣ $\mu^2 m_1 m_2 r_{12}$ и направленное противоположно направленію, соединяющему точку M_2 съ M_1; косинусы же угловъ, составляемыхъ послѣднимъ направленіемъ съ положительными осями X и Y, равны:

$$\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad \frac{y_1 - y_2}{r_{12}};$$

Очевидно нельзя рѣшать два дифференціальныя уравненія движенія точки M_1 независимо отъ рѣшенія двухъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки M_2, такъ какъ во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій заключаются координаты обѣихъ точекъ. Эти точки образуютъ теперь *систему*, состоящую изъ *двухъ матеріальныхъ точекъ*.

Возьмемъ другой примѣръ, въ которомъ двѣ матеріальныя точки будутъ представлять одну систему. Пусть обѣ точки M_1 и M_2 подвержены силѣ тяжести, не свободны, а связаны между собою нерастяжимымъ твердымъ стержнемъ, неимѣющимъ ни вѣса, ни массы. Пусть длина этого стержня равна l. Такъ какъ разстояніе между точками всегда должно быть равно l, то координаты ихъ должны удовлетворять слѣдующему равенству:

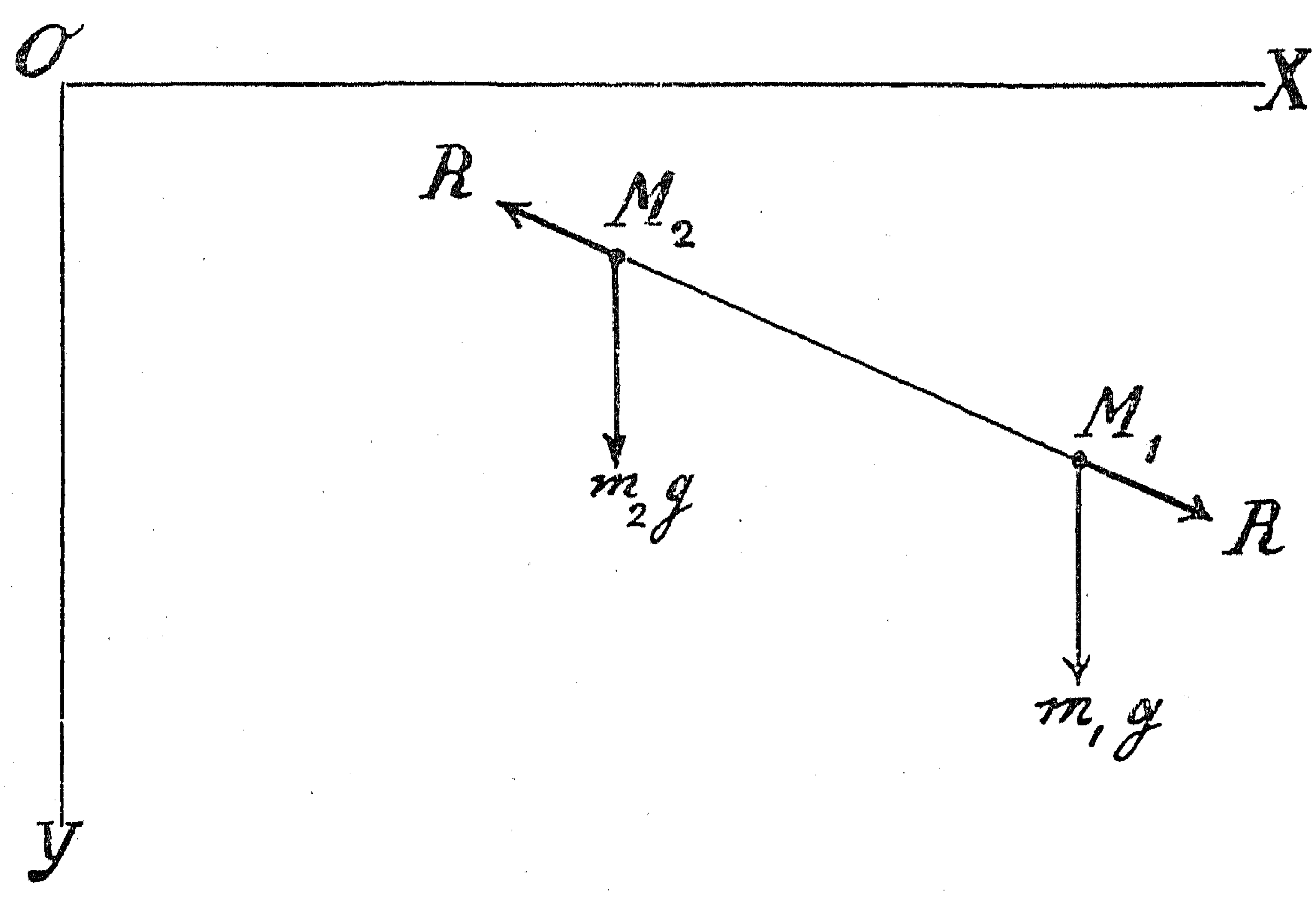
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Связанныя этимъ стержнемъ тяжелыя точки не вполнѣ свободны, разстояніе между ними не можетъ ни увеличиться, ни уменьшиться, поэтому мы не можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія ихъ въ такомъ видѣ:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \qquad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = m_1 g,$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0, \qquad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = m_2 g,$$

потому что на каждую изъ нихъ, кромѣ тяжести, дѣйствуютъ еще *сопротивленія стержня растяженію или сжатію*. Очевидно, что сопроти-



Фиг. 1.

вленія стержня растяженію или сжатію являются при приложеніи къ концамъ его двухъ равныхъ и прямопротивоположныхъ силъ, направленныхъ вдоль стержня, обѣ внаружу или обѣ внутрь стержня и поэтому сопротивленія стержня равны между собою и направлены внутрь или внаружу стержня. Такимъ образомъ, сопротивленіе стержня, приложенное къ точкѣ M_1, пусть равно R и направлено внаружу стержня, то есть, отъ точки M_2, черезъ M_1 и по продолженію направленія M_2M_1 (фиг. 1), такъ что проэкціи его на оси X-овъ и Y-овъ будутъ

$$R\,\frac{x_1 - x_2}{l}, \qquad R\,\frac{y_1 - y_2}{l}$$

и въ то же время къ точкѣ M_2 приложено сопротивленіе величины R, направленное по продолженію отъ M_1 къ M_2, имѣющее проэкціями на тѣ же оси слѣдующія величины:

$$R\,\frac{x_2 - x_1}{l}, \qquad R\,\frac{y_2 - y_1}{l}.$$

Такъ какъ, кромѣ того, къ точкамъ приложены еще и силы тяжести: $m_1 g$ и $m_2 g$, то дифференціальныя уравненія ихъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\,\frac{d^2x_1}{dt^2} &= R\,\frac{x_1 - x_2}{l},\\
m_1\,\frac{d^2y_1}{dt^2} &= m_1 g + R\,\frac{y_1 - y_2}{l},\\
m_2\,\frac{d^2x_2}{dt^2} &= R\,\frac{x_2 - x_1}{l},\\
m_2\,\frac{d^2y_2}{dt^2} &= m_2 g + R\,\frac{y_2 - y_1}{l}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Если сопротивленія будутъ направлены внутрь стержня, то уравненія будутъ тѣ же самыя, только R будетъ означать отрицательную величину.

И эти четыре дифференціальныя уравненія придется рѣшать *совокупно*, а не отдѣльно, потому что вторыя части ихъ заключаютъ координаты обѣихъ точекъ. Кромѣ того, здѣсь является еще новое обстоятельство, на которое слѣдуетъ обратить вниманіе, а именно: сопротивленіе R намъ неизвѣстно, зато мы имѣемъ кромѣ четырехъ дифференціальныхъ уравненій движенія еще алгебраическое уравненіе (1) *связи*, связывающей точки M_1 и M_2.

Въ механикѣ матеріальной точки мы имѣли случаи аналогичные. Дифференціальныя уравненія движенія несвободной матеріальной точки, остающейся на гладкой поверхности, заключаютъ во вторыхъ частяхъ своихъ *реакцію* поверхности, величина этой реакціи не извѣстна, пока не опредѣлено движеніе, но кромѣ дифференціальныхъ уравненій движенія имѣется еще уравненіе поверхности, связывающее между собою координаты матеріальной точки.

Этими примѣрами мы вводимъ читателя въ механику системы матеріальныхъ точекъ.

Нѣсколько матеріальныхъ точекъ образуютъ собою одну систему въ тѣхъ случаяхъ, когда нельзя разсматривать или опредѣлять равновѣсіе или движеніе которой либо изъ этихъ точекъ въ отдѣльности, не разсматривая или не опредѣляя въ то же время равновѣсія или движенія остальныхъ точекъ.

Зависимость между точками системы можетъ быть обусловлена двумя обстоятельствами:

1) Тѣмъ, что между точками дѣйствуютъ силы взаимно-дѣйствій такъ, что величины и направленія силъ, приложенныхъ къ которой либо изъ точекъ, зависятъ отъ координатъ другихъ точекъ системы.

2) Тѣмъ, что матеріальныя точки связаны между собою *механическими связями*, обусловливающими зависимость между положеніями точекъ въ пространствѣ и устанавливающими зависимость между движеніями ихъ.

Каждая *механическая связь* (Liaison) представляетъ собою тѣло, или даже цѣлый механизмъ, ограничивающій положенія точекъ системы и движенія ихъ такимъ образомъ, что координаты ихъ должны удовлетворять нѣкоторому аналитическому условію, выражаемому равенствомъ или неравенствомъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда система точекъ не заключаетъ связей, она называется *системою свободныхъ матеріальныхъ точекъ.*

Силы, дѣйствующія на точки и происходящія отъ связей, мы будемъ называть *сопротивленіями связей.*

Вышеприведенный случай твердаго стержня представляетъ простѣйшій примѣръ *удерживающей связи*, выражаемой равенствомъ (1). Если бы обѣ точки были связаны гибкою и вполнѣ нерастяжимою нитью длины L, такъ что разстояніе между точками не могло быть болѣе L, но могло бы быть менѣе L, то это представило бы собою примѣръ *неудерживающей связи*, выражаемой такъ:

$$L-\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=0 \text{ или } >0.$$

Чтобы не писать слова «или», условимся выражать эту связь такимъ образомъ:

$$L-\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\geqslant 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Сопротивленія этихъ связей очевидны; о сопротивленіяхъ стержня говорено раньше, сопротивленія же нити могутъ существовать только при вытянутой во всю длину нити; тогда они непремѣнно направлены оба *непремѣнно внутрь ея* и равняются натяженію нити. Если же разстояніе между точками менѣе длины нити, то сопротивленій нѣтъ.

Приведенныя двѣ связи даютъ сопротивленія безъ всякаго тренія и безъ какихъ либо тангенціальныхъ силъ, перпендикулярныхъ къ направленію стержня или нити, потому что ни тренію, ни тангенціальному сопротивленію здѣсь не откуда взяться.

Примѣромъ связи, въ которой могутъ быть сопротивленія вслѣдствіе тренія, можетъ служить слѣдующая связь между двумя точками M_1 и M_2. Точки эти прикрѣплены къ концамъ гибкой нерастяжимой нити длины L, которая перекинута черезъ блокъ весьма малаго діаметра, находящійся въ началѣ координатъ. Такъ какъ нить можетъ изгибаться, то связь эта неудерживающая и выражается аналитически такъ:

$$L - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \geqslant 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Допустимъ сначала, что нѣтъ тренія на блокѣ и что нить вполнѣ гибка, такъ что не существуетъ того сопротивленія, которое извѣстно подъ именемъ жесткости веревокъ.

Если нить вытянута и натянута, то тогда единственными сопротивленіями ея служатъ приложенныя къ концамъ ея (къ точкамъ M_1 и M_2) силы R, направленныя отъ точекъ M_1 и M_2 къ началу координатъ O. Силы эти равны между собою и равны натяженію нити.

Если же на оси блока есть треніе, то вслѣдствіе этого къ сопротивленію R въ точкѣ M_1 можетъ присоединиться добавочное сопротивленіе K, а къ сопротивленію R въ точкѣ M_2 добавочное отрицательное сопротивленіе ($-K$), происходящія отъ существованія тренія блока на оси. Обратно, можетъ быть добавочное сопротивленіе въ точкѣ M_1—отрицательное, а въ точкѣ M_2—положительное.

Допустимъ далѣе, что нить недостаточно гибка, тогда вслѣдствіе сопротивленія изгибу ея на тѣхъ мѣстахъ желобка блока, съ которыхъ она отдѣляется отъ него, въ точкахъ M_1 и M_2 могутъ появиться еще добавочныя сопротивленія T_1 и T_2, перпендикулярныя къ R. Такимъ образомъ, при существованіи этихъ обстоятельствъ *полныя сопротивленія* въ точкахъ M_1 и M_2 будутъ: равнодѣйствующая силъ $R + K$ и T_1, приложенныхъ къ точкѣ M_1 и равнодѣйствующая силъ $R - K$ и T_2, приложенныхъ къ точкѣ M_2.

Вообще каждая изъ удерживающихъ связей можетъ быть выражена аналитически нѣкоторымъ равенствомъ вида:

$$\varphi\,(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots z_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ лѣвая часть равенства есть опредѣленная функція координатъ тѣхъ точекъ системы, которыя она связываетъ; могутъ быть такія связи, уравненія которыхъ заключаютъ координаты всѣхъ точекъ M_1, $M_2, \ldots M_i, \ldots M_n$ системы.

Неудерживающая связь выражается аналитически условіемъ вида:

$$\varphi\,(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots z_n) \geqslant 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Каждая удерживающая связь, подобно связямъ (1) и (3), оказываетъ на точки системы, ею связываемыя, *сопротивленія* тѣмъ силамъ, которыя стремятся разрушить или преодолѣть ее. Эти силы, вызывающія сопротивленія связи, состоятъ изъ приложенныхъ къ точкамъ данныхъ силъ и изъ силъ инерціи точекъ. Силы сопротивленія связей, вызываемыя этими силами, прилагаются къ тѣмъ точкамъ системы, координаты которыхъ заключаются въ уравненіи связи.

Полныя сопротивленія связей разлагаются на части: 1) *реакціи* т. е. тѣ части полныхъ сопротивленій, которыя не обусловливаются треніемъ и 2) *сопротивленія, обусловливаемыя существованіемъ тренія* между тѣлами, входящими въ составъ механизма, воспроизводящаго связь. **Въ связяхъ (1) и (2) предыдущихъ примѣровъ вызываются только реакціи R и нѣтъ вовсе сопротивленій тренія,** въ связи же (3) есть реакціи R и могутъ образоваться сопротивленія тренія K и T.

Въ §§ 11 и 12 будетъ показано, какъ выражаются величины и направленія *реакцій* въ зависимости отъ вида функціи φ и въ зависимости отъ силъ, вызывающихъ реакціи. *Сопротивленіе же тренія* зависятъ не только отъ вида функціи φ и отъ силъ вызывающихъ реакцій, но также и отъ физическихъ свойствъ тѣлъ связи.

Теперь же мы ограничиваемся только соображеніями, при которыхъ принимаемъ во вниманіе, что всякая связь оказываетъ на точки системы ею связываемыя полныя сопротивленія, приложенныя къ этимъ точкамъ.

Если система связана нѣсколькими связями, то въ каждой точкѣ системы полныя сопротивленія всѣхъ связей, приложенныхъ къ каждой точкѣ, слагаются по правилу геометрическаго сложенія въ равнодѣйствующую полныхъ сопротивленій, приложенныхъ къ этой точкѣ.

§ 2. Дифференціальныя уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ даннымъ силамъ и связанныхъ данными связями, величины и направленія полныхъ сопротивленій которыхъ могутъ быть опредѣлены какимъ бы то ни было способомъ.

Пусть система состоитъ изъ n матеріальныхъ точекъ $M_1, M_2, \ldots M_i, \ldots M_n$, величины массъ которыхъ суть $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$, подверженныхъ даннымъ силамъ и подчиненныхъ такимъ связямъ, полныя сопротивленія которыхъ, приложенныя къ точкамъ системы, почему либо извѣстны.

Означимъ черезъ X_i, Y_i, Z_i проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей всѣхъ данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ M_i и черезъ X_i', Y_i', Z_i' означимъ проэкціи на тѣ же оси равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ полныхъ сопротивленій всѣхъ тѣхъ связей, въ уравненія которыхъ входятъ кординаты этой точки. Такъ какъ больше никакихъ силъ къ точкѣ M_i не приложено, то на тѣхъ же основаніяхъ, какъ и въ механикѣ матеріальной точки, имѣемъ слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія точки M_i:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + X_i', \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + Y_i', \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + Z_i'. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Такимъ же точно образомъ составимъ дифференціальныя уравненія всѣхъ прочихъ точекъ системы, т. е.: M_1, $M_2, \dots M_{i-1}$, $M_{i+1}, \dots M_n$.

По числу точекъ число дифференціальныхъ уравненій движенія системы будетъ $3n$.

§ 3. Уравненія равновѣсія силъ и полныхъ сопротивленій связей той же системы.

Та же система будетъ въ равновѣсіи въ такомъ положеніи, въ которомъ ускоренія всѣхъ точекъ ея будутъ равны нулю, поэтому уравненія равновѣсія силъ и полныхъ сопротивленій будутъ:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= X_i + X_i', \\ 0 &= Y_i + Y_i', \\ 0 &= Z_i + Z_i', \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3 \dots n$.

Число этихъ уравненій равновѣсія также равно $3n$.

§ 4. Общіе законы движенія матеріальныхъ системъ. Первый общій законъ: движенія центра инерціи.

Подъ общими законами движенія матеріальныхъ системъ подразумѣваются такіе законы движенія, которые примѣнимы ко всякой системѣ матеріальныхъ точекъ и тѣлъ, при всякихъ силахъ и при всякихъ связяхъ. Такихъ общихъ законовъ четыре.

Первые три закона движенія выражаются дифференціальными уравненіями второго порядка, четвертый — дифференціальными уравненіями перваго порядка.

Первый общій законъ получается слѣдующимъ образомъ. Сложимъ первые дифференціальныя уравненія (6) § 2 для всѣхъ точекъ системы, точно также сложимъ вторыя и также третьи дифференціальныя уравненія, тогда получимъ:

Изъ первыхъ:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \dots + m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \dots + m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} =$$

$$= X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n +$$
$$+ X_1' + X_2' + \ldots + X_i' + \ldots \quad X_n'.$$

Воспользуемся общепринятымъ обозначеніемъ помощью знака Σ суммы членовъ одинаковаго вида, но съ разными индексами i, который въ суммѣ имѣетъ значенія всего ряда чиселъ: 1, 2, 3, ... n, такъ что, напримѣръ

$$\sum m_i \frac{d^2x_t}{dt^2} = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \ldots + m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + \ldots + m_n \frac{d^2x_n}{dt^2}.$$

Тогда предыдущее уравненіе напишется короче:

$$\sum m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum X_i + \sum X_i'.$$

Подобнымъ же образомъ изъ вторыхъ и третьихъ уравненій (6) получимъ

$$\sum m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \sum Y_i + \sum Y_i'.$$

$$\sum m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \sum Z_i + \sum Z_i'.$$

Лѣвыя части этихъ равенствъ суть производныя второго порядка по t отъ суммъ:

$$\Sigma\, m_i x_i,\quad \Sigma\, m_i y_i,\quad \Sigma\, m_i z_i,$$

называемыхъ *статическими моментами* относительно плоскостей координатъ. Первый, равный суммѣ произведеній массъ точекъ и разстояній ихъ отъ плоскости YZ, есть статическій моментъ относительно плоскости YZ, второй — относительно плоскости ZX, третій — относительно плоскости XY.

Если раздѣлить статическіе моменты на сумму массъ точекъ системы, то получаются отношенія, которыя представляютъ собою координаты x_c, y_c, z_c нѣкоторой точки C, называемой *центромъ инерціи системы.*

$$x_c = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{\Sigma\, m_i},\quad y_c = \frac{\Sigma\, m_i y_i}{\Sigma\, m_i},\quad z_c = \frac{\Sigma\, m_i z_i}{\Sigma\, m_i} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Слѣдовательно, статическіе моменты равняются произведеніямъ:

$$Mx_c,\quad My_c,\quad Mz_c,$$

гдѣ

$$M = \Sigma\, m_i.$$

Подставивъ въ полученныя выше дифференціальныя уравненія вмѣсто статическихъ моментовъ равныя имъ произведенія, получимъ слѣдующія три дифференціальныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_c}{dt^2} &= B_x + B_x', \\ M\frac{d^2y_c}{dt^2} &= B_y + B_y', \\ M\frac{d^2z_c}{dt^2} &= B_z + B_z', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

гдѣ

$$B_x = \Sigma\, X_i,\ B_y = \Sigma\, Y_i,\ B_z = \Sigma\, Z_i$$

суть проэкціи на оси координатъ *геометрической суммы всѣхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ системы*, а

$$B_x' = \Sigma\, X_i',\ \ B_y' = \Sigma\, Y_i',\ \ B_z' = \Sigma\, Z_i'$$

суть проэкціи на оси координатъ *геометрической суммы всѣхъ полныхъ сопротивленій всѣхъ связей.*

Эти геометрическія суммы называются, первая *главнымъ векторомъ всѣхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ системы*, вторая —*главнымъ векторомъ полныхъ сопротивленій всѣхъ связей*, причемъ эти сопротивленія приложены къ точкамъ системы.

Дифференціальныя уравненія (9) выражаютъ *общій законъ движенія центра инерціи,* заключающійся въ томъ, что: *центръ инерціи системы движется такимъ образомъ, какъ двигалась бы матеріальная точка, въ которой сосредоточена масса всей системы и къ которой были бы приложены всѣ силы и всѣ сопротивленія связей, приложенныя въ дѣйствительности къ разнымъ точкамъ системы.*

§ 5. Частные случаи общаго закона движенія центра инерціи и слѣдствія его.

Если главные векторы силъ и сопротивленій связей во всякій моментъ времени равны нулю, то равно нулю и ускореніе центра инерціи, то есть, центръ инерціи тогда или находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно.

Примѣрами такой системы, главный векторъ сопротивленій которой равенъ нулю, могутъ служить: 1) система свободныхъ матеріальныхъ точекъ, 2) система матеріальныхъ точекъ, заключающая въ себѣ только неизмѣняемые стержни, связывающіе точки попарно.

1) Если между точками системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ дѣйствуютъ только какія бы то ни было силы взаимодѣйствія между точками по парно (такъ что на точку M_i дѣйствуетъ нѣкоторая сила со стороны точки M_k и вмѣстѣ съ тѣмъ равная и прямопротивоположная

сила дѣйствуетъ со стороны точки M_i на точку M_k) то главный векторъ всѣхъ этихъ *внутреннихъ силъ системы* равенъ нулю. Центръ инерціи такой системы свободныхъ точекъ можетъ быть (по свойству инерціи) либо въ покоѣ, либо въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи, хотя каждая изъ точекъ имѣетъ собственное неравномѣрное движеніе подъ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ на нее изъ остальныхъ точекъ.

2) Относительно неизмѣняемаго стержня, связывающаго двѣ матеріальныя точки, было уже сказано въ § 1-мъ, что въ такомъ стержнѣ сопротивленія суть только *реакціи*, приложенныя къ точкамъ, обѣ равныя и прямо-противоположныя. Стало быть, сколько бы ни было стержней, связывающихъ точки системы попарно, главный векторъ реакцій всѣхъ этихъ стержней будетъ равенъ нулю.

Абсолютно-твердое тѣло можно разсматривать какъ вполнѣ неизмѣняемую систему матеріальныхъ точекъ, связанныхъ столькими связями между точками попарно, сколько необходимо, чтобы разстоянія между каждыми двумя точками оставалось неизмѣннымъ.

Если на такую неизмѣняемую систему (или на твердое тѣло) не будутъ дѣйствовать никакія внѣшнія силы, то центръ инерціи ея (или тѣла) можетъ быть (по свойству инерціи) либо въ покоѣ, либо въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи, хотя самое тѣло можетъ еще и вращаться какъ либо вокругъ своего центра инерціи.

Если на всѣ точки системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ, при существованіи между ними внутреннихъ силъ взаимодѣйствія, дѣйствуютъ еще и силы тяжести, то центръ инерціи (онъ же центръ тяжести системы) будетъ совершать движеніе по параболѣ, какъ совершаетъ тяжелая матеріальная точка. Положеніе вершины параболы и величина ея параметра опредѣляются по начальному положенію и начальной скорости центра инерціи (центра тяжести).

Къ этому надо прибавить, что, если представить себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ тяжести, то каждая точка системы будетъ совершать свое особенное относительное движеніе (по отношенію къ этой средѣ) подъ вліяніемъ приложенныхъ къ ней силъ взаимодѣйствія со стороны прочихъ точекъ.

Такимъ образомъ центръ тяжести разорвавшагося на лету снаряда продолжаетъ свое параболическое движеніе и послѣ разрыва, а каждый изъ образовавшихся осколковъ описываетъ иную параболу вслѣдствіе прибавленія къ нему добавочной скорости, сообщенной при разрывѣ.

Если тѣло находится въ покоѣ, то центру инерціи его можетъ быть сообщено движеніе только вслѣдствіе приложенія къ нему какой либо внѣшнія силы, на него дѣйствующей.

Покоющійся на рельсахъ желѣзной дороги паровозъ приходитъ въ