

Издание Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

МЕХАНИКА
СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ,
МГНОВЕННЫЯ СИЛЫ И ВЗАЙМНЫЕ УДАРЫ
МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ТѢЛАМИ.



СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ,

Заслуженный Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1905.

Печатано по распоряженію Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

О Г Л А В Л Е Н И Е.

СТР.

Механика системы материальныхъ точекъ	1
§ 1. Система материальныхъ точекъ. Связи. Сопротивленія связей	1
§ 2. Дифференціальныя уравненія движенія системы материальныхъ точекъ, подверженныхъ даннымъ силамъ и связанныхъ данными связями, величины и направлениа сопротивленій которыхъ могутъ быть опредѣлены какимъ бы то ни было образомъ	7
§ 3. Уравненія равновѣсія силъ и полныхъ сопротивленій связей той же системы	8
§ 4. Общіе законы движенія материальныхъ системъ. Первый общій законъ: движенія центра инерціи	8
§ 5. Частные случаи общаго закона движенія центра инерціи и слѣдствія ихъ .	10
§ 6. Общій законъ измѣненія главнаго момента количествъ движенія материальной системы. (а) Моменты вокругъ начала координатъ	12
§ 7. Общій законъ измѣненія главнаго момента количествъ движенія материальной системы. (б) Моменты вокругъ центра инерціи	14
§ 8. Общій законъ измѣненія живой силы системы	18
§ 9. Общій законъ измѣненія количества движенія каждой материальной точки системы	19
§ 10. Возможныя перемѣщенія системы точекъ, подчиненныхъ связямъ . .	20
§ 11. Величины и направлениа дифференціальныхъ параметровъ связи. Раздѣленіе сопротивленій связи на реакціи и на сопротивленія, зависящія отъ тренія и отъ физическихъ свойствъ связи	23
§ 12, а. Дифференціальныя уравненія движенія системы материальныхъ точекъ, связанныхъ нѣсколькими идеальными связями (безъ тренія)	27
§ 12, б. Дифференціальныя уравненія движенія системы материальныхъ точекъ, связанныхъ нѣсколькими связями съ сопротивленіями тренія	28
§ 13. Уравненія равновѣсія системы материальныхъ точекъ, связанныхъ нѣсколькими идеальными связями. Условія равновѣсія данныхъ силъ, приложенныхъ къ материальнымъ точкамъ	29
§ 14. Начало возможныхъ перемѣщеній изъ положеній равновѣсія системы материальныхъ точекъ, подчиненныхъ идеальнымъ связямъ	40
§ 15. Число интегрированій, необходимыхъ для опредѣленія движенія системы материальныхъ точекъ, подчиненныхъ связямъ. Число произвольныхъ постоянныхъ. Условія, которымъ должны удовлетворять проекціи скорости точекъ вслѣдствіе существованія связей	44
§ 16. Интегралы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія, получаемые при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій движенія центра инерціи	45
§ 17. Случай, въ которыхъ дифференціальныя уравненія главнаго момента количествъ движенія даютъ интегралы, выражающіе законы площадей	50
§ 18. Интеграль, выражающій законъ сохраненія полной энергіи системы. Теорема Кенига о разложеніи живой силы системы на двѣ части	54
§ 19. Понятіе о виртуальныхъ отклоненіяхъ движущихся материальныхъ точекъ	59
§ 20. Потерянныя силы. Сила инерціи. Начало Даламбера. Начало виртуальныхъ отклоненій	61
§ 21. Примѣры решенія нѣкоторыхъ вопросовъ изъ области динамики материальныхъ точекъ	63

Динамика твердыхъ тѣлъ	72
§ 1. Неизмѣняемая система материальныхъ точекъ и абсолютно твердое материальное тѣло	72
§ 2. Величины, опредѣляющія положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ .	74
§ 3. Дифференціальная уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла . . .	76
§ 4. Моменты инерціи тѣла вокругъ разныхъ осей. Свойства моментовъ инерціи вокругъ разныхъ осей, пересѣкающихся или параллельныхъ. Эллипсоидъ инерціи для какой либо точки тѣла. Главныя оси инерціи. Центральный эллипсоидъ инерціи. Главныя центральныя оси инерціи. Главные моменты инерціи. Вычислениe величинъ ихъ для однородныхъ тѣлъ и для тѣлъ, масса которыхъ имѣеть ось симметріи	80
§ 5. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси. Условія, при которыхъ ось вращенія можетъ быть свободною. Физическій маятникъ	90
§ 6. Поступательное движение твердаго тѣла	99
§ 7. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости. Мгновенный центръ и мгновенная ось центровъ. Центроиды; катаніе безъ скольженія центроиды, движущейся по центроидѣ неподвижной . .	99
§ 8. Дифференціальная уравненія движенія твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости. Живая сила при этомъ движеніи. Законъ измѣненія живой силы тѣла. Сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ нему .	103
§ 9. Вопросы о катаніи однородныхъ твердыхъ тѣлъ цилиндрическаго вида и тѣлъ вращенія по плоскостямъ или цилиндрическимъ поверхностямъ	105
§ 10. Объ относительномъ движеніи одного твердаго тѣла по отношенію къ другому въ томъ случаѣ, когда оба тѣла имѣютъ абсолютное движение параллельно одной и той же неподвижной плоскости	115
§ 11. Соединеніе вращеній вокругъ пересѣкающихся осей	120
§ 12. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ центра инерціи. Проекціи угловой скорости на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ	122
§ 13. Проекціи на оси, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ вращательной скорости какой либо точки тѣла при вращеніи его вокругъ центра инерціи .	125
§ 14. Проекціи главнаго линейнаго момента количествъ движенія твердаго тѣла, вокругъ центра инерціи его, на главныя центральныя оси инерціи	126
§ 15. Живая сила вращенія твердаго тѣла вокругъ центра инерціи	127
Мгновенные силы и взаимные удары между твердыми тѣлами	129
§ 1. Общій законъ измѣненія количества движенія каждой материальной точки системы	129
§ 2. Мгновенные силы	130
§ 3. Свободная неизмѣняемая система материальныхъ точекъ подъ дѣйствиемъ мгновенной силы, приложенной къ одной изъ точекъ ея.	132
§ 4. Ударъ двухъ гладкихъ твердыхъ, поступательно-движущихся шаровъ. Раздѣленіе удара на два акта. Измѣненіе живой силы при ударѣ	135
§ 5. Продольный ударъ какихъ либо твердыхъ тѣлъ, движущихся поступательно такъ, что центры тяжести ихъ остаются на одной прямой. Примѣненіе къ вопросу о вбиваніи свай	141
§ 6. Ударъ материальной точки о поверхность неподвижнаго или движущагося твердаго тѣла	143
§ 7. Ударъ твердаго гладкаго шара, движущагося поступательно, о твердое гладкое тѣло, движущееся параллельно неподвижной плоскости	147
§ 8. Ударъ шара о неподвижный свободный твердый брусь перпендикулярно къ его длине	150
§ 9. Ударъ движущагося бруса или параллелопипеда о вплоть неподвижное препятствіе	151
§ 10. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось. Центръ удара. Баллистический маятникъ	153

Механика системы материальных точекъ.

§ 1. Система материальных точекъ. Связи. Сопротивление связей.

Въ механикѣ материальной точки рассматривались и опредѣлялись положенія равновѣсія и движение одной материальной точки свободной или несвободной.

Такимъ же образомъ можно опредѣлять равновѣсіе и движение нѣсколькихъ материальныхъ точекъ, независимо одна отъ другой, если силы приложенные къ каждой изъ точекъ, независятъ отъ координатъ другихъ точекъ. Тогда движение и равновѣсіе каждой изъ этихъ точекъ можетъ быть опредѣляемо отдельно, независимо отъ разсмотрѣнія движенія и равновѣсія другихъ точекъ.

Напримѣръ, положимъ, что имѣется двѣ тяжелыя материальные точки M_1 (масса m_1) и M_2 (масса m_2). Обѣ остаются въ плоскости XU , причемъ сила тяжести, дѣйствующая на обѣ точки, направлена параллельно положительнѣй оси U -овъ. На точку M_2 , кроме силы тяжести, дѣйствуетъ еще сила притяженія къ началу координатъ, пропорціональная разстоянію отъ него и равная $\mu^2 m_2 r_2$, гдѣ r_2 есть длина радиуса вектора OM_2 , такъ что $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$. Величины x_1, y_1, x_2, y_2 суть координаты первой и второй точки, g —ускореніе силы тяжести.

Дифференціальныя уравненія движенія 1-ї точки:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = m_1 g$$

можно интегрировать независимо отъ дифференціальныхъ уравненій движенія второй точки:

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\mu^2 m_2 x_2, \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = m_2 g - \mu^2 m_2 y_2$$

и послѣднія—независимо отъ первыхъ. Можно еще замѣтить, что вторая точка можетъ находиться въ равновѣсіи на оси U -овъ, въ точкѣ, имѣющей ординату

$$y_0 = \frac{g}{\mu^2}.$$

Какъ известно изъ механики материальной точки, рѣшенія первыхъ дифференціальныхъ уравненій суть:

$$x_1 = C_1 t + C_2, \quad y_1 = g \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

а вторыхъ

$$x_2 = C_5 \cos \mu t + C_6 \sin \mu t,$$

$$y_2 = y_0 + C_7 \cos \mu t + C_8 \sin \mu t.$$

Изъ механики материальной точки известно, что первая точка совершаетъ движение по параболѣ, главная ось которой параллельна положительнѣй оси Y , а вторая точка описываетъ эллипсъ, центръ котораго находится въ положеніи равновѣсія этой точки, т. е. имѣть координаты $x_2 = 0$ и $y_2 = y_0$.

Дѣло измѣнится весьма существенно, если между материальными точками будутъ дѣйствовать силы взаимодѣйствія. Напримѣръ, если въ предыдущемъ примѣрѣ, вмѣсто силы притяженія точки M_2 къ началу координатъ, будетъ дѣйствовать на нее притяженіе къ точкѣ M_1 , равное $\mu^2 m_1 m_2 r_{12}$ и направленное къ точкѣ M_1 , а на точку M_1 будетъ дѣйствовать притяженіе той же величины и направленное къ точкѣ M_2 , гдѣ r_{12} есть величина разстоянія между этими точками, такъ что $r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, то дифференціальные уравненія движения этихъ точекъ будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (x_1 - x_2), \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (y_1 - y_2) + m_1 g, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -\mu^2 m_1 m_2 (y_2 - y_1) + m_2 g, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

потому что напр. на точку M_1 дѣйствуетъ, кроме силы тяжести ея, еще притяженіе къ точкѣ M_2 , равное по величинѣ $\mu^2 m_1 m_2 r_{12}$ и направленное противоположно направленію, соединяющему точку M_2 съ M_1 ; косинусы же угловъ, составляемыхъ послѣднимъ направленіемъ съ положительными осями X и Y , равны:

$$\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad \frac{y_1 - y_2}{r_{12}},$$

Очевидно нельзя рѣшать два дифференціальныхъ уравненія движения точки M_1 независимо отъ рѣшенія двухъ дифференціальныхъ уравненій движения точки M_2 , такъ какъ во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій за-

ключаются координаты обѣихъ точекъ. Эти точки образуютъ теперь *систему*, состоящую изъ *двухъ материальныхъ точекъ*.

Возьмемъ другой примѣръ, въ которомъ двѣ материальные точки будуть представлять одну систему. Пусть обѣ точки M_1 и M_2 подвержены силѣ тяжести, не свободны, а связаны между собою нерастяжимымъ твердымъ стержнемъ, неимѣющимъ ни вѣса, ни массы. Пусть длина этого стержня равна l . Такъ какъ разстояніе между точками всегда должно быть равно l , то координаты ихъ должны удовлетворять слѣдующему равенству:

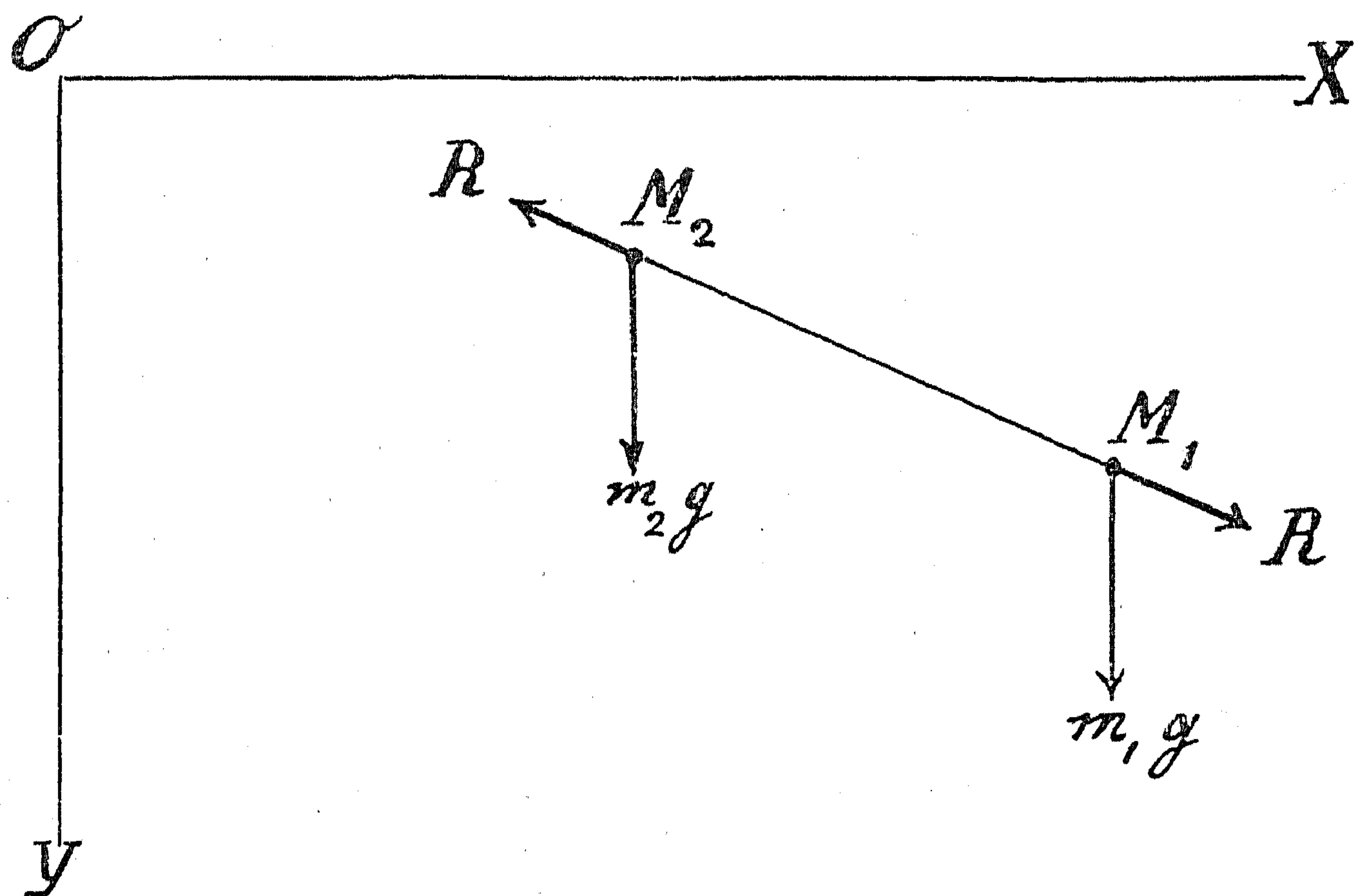
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l = 0 \quad \quad (1)$$

Связанныя этими стержнемъ тяжелыя точки не вполнѣ свободны, разстояніе между ними не можетъ ни увеличиться, ни уменьшиться, поэтому мы не можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія ихъ въ такомъ видѣ:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = m_1 g,$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0, \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = m_2 g,$$

потому что на каждую изъ нихъ, кромѣ тяжести, дѣйствуютъ еще *сопротивленія стержня растяженію или сжатію*. Очевидно, что сопротив-



Фиг. 1.

вленія стержня растяженію или сжатію являются при приложеніи къ концамъ его двухъ равныхъ и прямо противоположныхъ силъ, направленныхъ вдоль стержня, обѣ внаружу или обѣ внутрь стержня и поэтому сопротивленія стержня равны между собою и направлены внутрь или внаружу стержня. Такимъ образомъ, сопротивленіе стержня, приложенное къ точкѣ M_1 , пусть равно R и направлено внаружу стержня, то есть, отъ точки M_2 , черезъ M_1 и по продолженію направленія M_2M_1 (фиг. 1),

такъ что проекціи его на оси X -овъ и Y -овъ будуть

$$R \frac{x_1 - x_2}{l}, \quad R \frac{y_1 - y_2}{l}$$

и въ то же время къ точкѣ M_2 приложено сопротивленіе величины R , направленное по продолженію отъ M_1 къ M_2 , имѣющее проекціями на тѣ же оси слѣдующія величины:

$$R \frac{x_2 - x_1}{l}, \quad R \frac{y_2 - y_1}{l}.$$

Такъ какъ, кроме того, къ точкамъ приложены еще и силы тяжести: m_1g и m_2g , то дифференціальныя уравненія ихъ будуть:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = R \frac{x_1 - x_2}{l}, \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = m_1g + R \frac{y_1 - y_2}{l}, \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = R \frac{x_2 - x_1}{l}, \\ m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = m_2g + R \frac{y_2 - y_1}{l}. \end{array} \right\} \quad \quad (b)$$

Если сопротивленія будутъ направлены внутрь стержня, то уравненія будутъ тѣ же самыя, только R будетъ означать отрицательную величину.

И эти четыре дифференціальныя уравненія придется рѣшать *совокупно*, а не отдельно, потому что вторыя части ихъ заключаютъ координаты обѣихъ точекъ. Кроме того, здѣсь является еще новое обстоятельство, на которое слѣдуетъ обратить вниманіе, а именно: сопротивленіе R памъ неизвѣстно, зато мы имѣемъ кроме четырехъ дифференціальныхъ уравненій движенія еще алгебраическое уравненіе (1) *связи*, связывающей точки M_1 и M_2 .

Въ механикѣ материальной точки мы имѣли случаи аналогичные. Дифференціальныя уравненія движенія несвободной материальной точки, остающейся на гладкой поверхности, заключаютъ во вторыхъ частяхъ своихъ *реакцію* поверхности, величина этой реакціи не известна, пока не опредѣлено движеніе, но кроме дифференціальныхъ уравненій движенія имѣется еще уравненіе поверхности, связывающее между собою координаты материальной точки.

Этими примѣрами мы вводимъ читателя въ механику системы материальныхъ точекъ.

Нѣсколько материальныхъ точекъ образуютъ собою одну систему въ тѣхъ случаяхъ, когда нельзѧ разматривать или опредѣлять равновѣсіе

или движение которой либо изъ этихъ точекъ въ отдельности, не рассматривая или не опредѣляя въ то же время равновѣсія или движенія остальныхъ точекъ.

Зависимость между точками системы можетъ быть обусловлена двумя обстоятельствами:

1) Тѣмъ, что между точками дѣйствуютъ силы взаимно-дѣйствій такъ, что величины и направленія силь, приложенныхъ къ которой либо изъ точекъ, зависятъ отъ координатъ другихъ точекъ системы.

2) Тѣмъ, что материальныя точки связаны между собою *механическими связями*, обусловливающими зависимость между положеніями точекъ въ пространствѣ и устанавливающими зависимость между движеніями ихъ.

Каждая *механическая связь* (Liaison) представляетъ собою тѣло, или даже цѣлый механизмъ, ограничивающій положенія точекъ системы и движенія ихъ такимъ образомъ, что координаты ихъ должны удовлетворять нѣкоторому аналитическому условію, выражаемому равенствомъ или неравенствомъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда система точекъ не заключаетъ связей, она называется *системою свободныхъ материальныхъ точекъ*.

Силы, дѣйствующія на точки и происходящія отъ связей, мы будемъ называть *сопротивленіями связей*.

Вышеприведенный случай твердаго стержня представляетъ простѣйшій примѣръ *удерживающей связи*, выражаемой равенствомъ (1). Если бы обѣ точки были связаны гибкою и вполнѣ нерастяжимою нитью длины L , такъ что разстояніе между точками не могло бытъ болѣе L , но могло бытъ менѣе L , то это представило бы собою примѣръ *неудерживающей связи*, выражаемой такъ:

$$L - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = 0 \text{ или } > 0.$$

Чтобы не писать слова «или», условимся выражать эту связь такимъ образомъ:

$$L - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \geq 0 . . . \quad (2)$$

Сопротивленія этихъ связей очевидны; о сопротивленіяхъ стержня говорено раньше, сопротивленія же нити могутъ существовать только при вытянутой во всю длину нити; тогда они непремѣнно направлены оба *непремѣнно внутрь ея* и равняются натяженію нити. Если же разстояніе между точками менѣе длины нити, то сопротивленій нѣть.

Приведенные двѣ связи даютъ сопротивленія безъ всякаго тренія и безъ какихъ либо тангенціальныхъ силь, перпендикулярныхъ къ направленію стержня или нити, потому что ни тренію, ни тангенціальному сопротивленію здѣсь не откуда взяться.

Примѣромъ связи, въ которой могутъ быть сопротивленія вслѣдствіе тренія, можетъ служить слѣдующая связь между двумя точками M_1 и M_2 . Точки эти прикреплены къ концамъ гибкой нерастяжимой нити длины L , которая перекинута черезъ блокъ весьма малаго диаметра, находящійся въ началѣ координатъ. Такъ какъ нить можетъ изгибаться, то связь эта неудерживающая и выражается аналитически такъ:

$$L - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \geq 0 . . . (3)$$

Допустимъ сначала, что нѣтъ тренія на блокѣ и что нить вполнѣ гибка, такъ что не существуетъ того сопротивленія, которое известно подъ именемъ жесткости веревокъ.

Если нить вытянута и натянута, то тогда единственными сопротивленіями ея служать приложенные къ концамъ ея (къ точкамъ M_1 и M_2) силы R , направленные отъ точекъ M_1 и M_2 къ началу координатъ O . Силы эти равны между собою и равны натяженію нити.

Если же на оси блока есть треніе, то вслѣдствіе этого къ сопротивленію R въ точкѣ M_1 можетъ присоединиться добавочное сопротивленіе K , а къ сопротивленію R въ точкѣ M_2 , добавочное отрицательное сопротивленіе ($-K$), происходящія отъ существованія тренія блока на оси. Обратно, можетъ быть добавочное сопротивленіе въ точкѣ M_1 —отрицательное, а въ точкѣ M_2 —положительное.

Допустимъ далѣе, что нить недостаточно гибка, тогда вслѣдствіе сопротивленія изгибу ея на тѣхъ мѣстахъ желобка блока, съ которыхъ она отдѣляется отъ него, въ точкахъ M_1 и M_2 , могутъ появиться еще добавочные сопротивленія T_1 и T_2 , перпендикулярныя къ R . Такимъ образомъ, при существованіи этихъ обстоятельствъ *полныя сопротивленія* въ точкахъ M_1 и M_2 будутъ: равнодѣйствующая силь $R + K$ и T_1 , приложенныхъ къ точкѣ M_1 и равнодѣйствующая силь $R - K$ и T_2 , приложенныхъ къ точкѣ M_2 .

Вообще каждая изъ удерживающихъ связей можетъ быть выражена аналитически нѣкоторымъ равенствомъ вида:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, z_n) = 0, (4)$$

гдѣ лѣвая часть равенства есть опредѣленная функція координатъ тѣхъ точекъ системы, которыя она связываетъ; могутъ быть такія связи, уравненія которыхъ заключаютъ координаты всѣхъ точекъ $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ системы.

Неудерживающая связь выражается аналитически условіемъ вида:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, z_n) \geq 0. (5)$$

Каждая удерживающая связь, подобно связямъ (1) и (3), оказываетъ на точки системы, ею связываемыя, *сопротивлениія* тѣмъ силамъ, которые стремятся разрушить или преодолѣть ее. Эти силы, вызывающія сопротивленія связи, состоять изъ приложенныхъ къ точкамъ данныхъ силъ и изъ силъ инерціи точекъ. Силы сопротивленія связей, вызываемыя этими силами, прилагаются къ тѣмъ точкамъ системы, координаты которыхъ заключаются въ уравненіи связи.

Полныя сопротивленія связей разлагаются на части: 1) *реакціи* т. е. тѣ части полныхъ сопротивленій, которые не обусловливаются треніемъ и 2) *сопротивленія, обусловливаемыя существованіемъ тренія* между тѣлами, входящими въ составъ механизма, воспроизводящаго связь. Въ связяхъ (1) и (2) предыдущихъ примѣровъ вызываются только реакціи R и нѣтъ вовсе сопротивленій тренія, въ связи же (3) есть реакціи R и могутъ образоваться сопротивленія тренія K и T .

Въ §§ 11 и 12 будетъ показано, какъ выражаются величины и направлениа *реакцій* въ зависимости отъ вида функции φ и въ зависимости отъ силъ, вызывающихъ реакціи. *Сопротивление же тренія* зависятъ не только отъ вида функции φ и отъ силъ вызывающихъ реакцій, но также и отъ физическихъ свойствъ тѣлъ связи.

Теперь же мы ограничиваемся только соображеніями, при которыхъ принимаемъ во вниманіе, что всякая связь оказываетъ на точки системы ею связываемыя полныя сопротивленія, приложенные къ этимъ точкамъ.

Если система связана нѣсколькими связями, то въ каждой точкѣ системы полныя сопротивленія всѣхъ связей, приложенныхъ къ каждой точкѣ, слагаются по правилу геометрическаго сложенія въ равнодѣйствующую полныхъ сопротивленій, приложенныхъ къ этой точкѣ.

§ 2. Дифференціальныя уравненія движенія системы материальныx точекъ, подверженыхъ даннымъ силамъ и связанныхъ данными связями, величины и направлениа полныхъ сопротивленій которыхъ могутъ быть опредѣлены какимъ бы то ни было способомъ.

Пусть система состоять изъ n материальныхъ точекъ $M_1, M_2, \dots M_i, \dots M_n$, величины массъ которыхъ суть $m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$, подверженыхъ данныхъ силамъ и подчиненныхъ такимъ связямъ, полныя сопротивленія которыхъ, приложенные къ точкамъ системы, почему либо известны.

Означимъ черезъ X_i, Y_i, Z_i проекціи на оси координатъ равнодѣйствующей всѣхъ данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ M_i и черезъ X'_i, Y'_i, Z'_i означимъ проекціи на тѣ же оси равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ полныхъ сопротивленій всѣхъ тѣхъ связей, въ уравненія которыхъ входятъ координаты этой точки. Такъ какъ больше никакихъ силъ къ точкѣ M_i не приложено, то на тѣхъ же основаніяхъ, какъ

и въ механикѣ материальной точки, имѣемъ слѣдующія дифференціальные уравненія движения точки M_i :

$$\left. \begin{array}{l} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + X'_i, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + Y'_i, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + Z'_i. \end{array} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

Такимъ же точно образомъ составимъ дифференціальные уравненія всѣхъ прочихъ точекъ системы, т. е.: $M_1, M_2, \dots M_{i-1}, M_{i+1}, \dots M_n$.

По числу точекъ число дифференціальныхъ уравненій движения системы будетъ $3n$.

§ 3. Уравненія равновѣсія силь и полныхъ сопротивленій связей той же системы.

Та же система будетъ въ равновѣсіи въ такомъ положеніи, въ которомъ ускоренія всѣхъ точекъ ея будутъ равны нулю, поэтому уравненія равновѣсія силь и полныхъ сопротивленій будутъ:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = X_i + X'_i, \\ 0 = Y_i + Y'_i, \\ 0 = Z_i + Z'_i, \end{array} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3 \dots n$.

Число этихъ уравненій равновѣсія также равно $3n$.

§ 4. Общіе законы движенія материальныхъ системъ. Первый общій законъ: движенія центра инерціи.

Подъ общими законами движенія материальныхъ системъ подразумѣваются такие законы движенія, которые примѣнимы ко всякой системѣ материальныхъ точекъ и тѣль, при всякихъ силахъ и при всякихъ связяхъ. Такихъ общихъ законовъ четыре.

Первые три закона движения выражаются дифференціальными уравненіями второго порядка, четвертый — дифференціальными уравненіями первого порядка.

Первый общій законъ получается слѣдующимъ образомъ. Сложимъ первые дифференціальные уравненія (6) § 2 для всѣхъ точекъ системы, точно также сложимъ вторыя и также третыи дифференціальные уравненія, тогда получимъ:

Изъ первыхъ:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \dots + m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \dots + m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} =$$

$$= X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n + \\ + X'_1 + X'_2 + \dots + X'_i + \dots + X'_n.$$

Воспользуемся общепринятымъ обозначеніемъ помощью знака Σ суммы членовъ одинакового вида, но съ разными индексами i , который въ суммѣ имѣть значенія всего ряда чиселъ: 1, 2, 3, ... n , такъ что, напримѣръ

$$\sum m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \dots + m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + \dots + m_n \frac{d^2x_n}{dt^2}.$$

Тогда предыдущее уравненіе напишется короче:

$$\sum m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum X_i + \sum X'_i.$$

Подобнымъ же образомъ изъ вторыхъ и третьихъ уравненій (6) получимъ

$$\sum m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \sum Y_i + \sum Y'_i.$$

$$\sum m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \sum Z_i + \sum Z'_i.$$

Лѣвые части этихъ равенствъ суть производныя второго порядка по t отъ суммъ:

$$\Sigma m_i x_i, \Sigma m_i y_i, \Sigma m_i z_i,$$

называемыхъ *статическими моментами* относительно плоскостей координатъ. Первый, равный суммѣ произведеній массъ точекъ и разстояній ихъ отъ плоскости YZ , есть статический моментъ относительно плоскости YZ , второй — относительно плоскости ZX , третій — относительно плоскости XY .

Если раздѣлить статические моменты на сумму массъ точекъ системы, то получаются отношенія, которые представляютъ собою координаты x_c, y_c, z_c некоторой точки C , называемой *центромъ инерции* системы.

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad z_c = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}. \quad \dots \quad (8)$$

Слѣдовательно, статические моменты равняются произведеніямъ:

$$Mx_c, \quad My_c, \quad Mz_c,$$

гдѣ

$$M = \Sigma m_i.$$

Подставивъ въ полученные выше дифференціальные уравненія вместо статическихъ моментовъ равные имъ произведенія, получимъ слѣдующія

три дифференціальныя уравненія:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x_c}{dt^2} &= B_x + B'_x, \\ M \frac{d^2y_c}{dt^2} &= B_y + B'_y, \\ M \frac{d^2z_c}{dt^2} &= B_z + B'_z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (9)$$

гдѣ

$$B_x = \Sigma X_i, \quad B_y = \Sigma Y_i, \quad B_z = \Sigma Z_i$$

суть проекціи на оси координат геометрической суммы всіх сил, приложенных ко всімъ точкамъ системы, а

$$B'_x = \Sigma X'_i, \quad B'_y = \Sigma Y'_i, \quad B'_z = \Sigma Z'_i$$

суть проекціи на оси координат геометрической суммы всіхъ полныхъ сопротивлений всіхъ связей.

Эти геометрическія суммы называются, первая *главнымъ векторомъ всіхъ силъ, приложенныхъ ко всімъ точкамъ системы*, вторая — *главнымъ векторомъ полныхъ сопротивлений всіхъ связей*, причемъ эти сопротивленія приложены къ точкамъ системы.

Дифференціальныя уравненія (9) выражаютъ общий законъ движенія центра инерціи, заключающійся въ томъ, что: центръ инерціи системы движется такимъ образомъ, какъ двигалась бы материальная точка, въ которой сосредоточена масса всей системы и къ которой были бы приложены всі силы и всі сопротивленія связей, приложенные въ действительности къ разнымъ точкамъ системы.

§ 5. Частные случаи общаго закона движенія центра инерціи и слѣдствія его.

Если главные векторы силъ и сопротивленій связей во всякий моментъ времени равны нулю, то равно нулю и ускорение центра инерціи, то есть, центръ инерціи тогда или находится въ покое или движется равномѣрно и прямолинейно.

Примѣрами такой системы, главный векторъ сопротивленій которой равенъ нулю, могутъ служить: 1) система свободныхъ материальныхъ точекъ; 2) система материальныхъ точекъ, заключающая въ себѣ только неизмѣняемые стержни, связывающіе точки попарно.

1) Если между точками системы свободныхъ материальныхъ точекъ дѣйствуютъ только какія бы то ни было силы взаимодѣйствія между точками по парно (такъ что на точку M_i дѣйствуетъ некоторая сила со стороны точки M_k и вмѣстѣ съ тѣмъ равная и прямопротивоположная

сила дѣйствуетъ со стороны точки M_i на точку M_k) то главный векторъ всѣхъ этихъ внутреннихъ силъ системы равенъ нулю. Центръ инерціи такой системы свободныхъ точекъ можетъ быть (по свойству инерціи) либо въ покоѣ, либо въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи, хотя каждая изъ точекъ имѣть собственное неравномѣрное движение подъ вліяніемъ силь, дѣйствующихъ на нее изъ остальныхъ точекъ.

2) Относительно неизмѣняемаго стержня, связывающаго двѣ матеріальныя точки, было уже сказано въ § 1-мъ, что въ такомъ стержнѣ сопротивленія суть только *реакціи*, приложенные къ точкамъ, обѣ равныя и прямо-противоположныя. Стало быть, сколько бы ни было стержней, связывающихъ точки системы попарно, главный векторъ реакцій всѣхъ этихъ стержней будетъ равенъ нулю.

Абсолютно-твърдое тѣло можно рассматривать какъ вполнѣ неизмѣняемую систему матеріальныхъ точекъ, связанныхъ столькими связями между точками попарно, сколько необходимо, чтобы разстоянія между каждыми двумя точками оставалось неизмѣннымъ.

Если на такую неизмѣняемую систему (или на твърдое тѣло) не будуть дѣйствовать никакія внѣшнія силы, то центръ инерціи ея (или тѣла) можетъ быть (по свойству инерціи) либо въ покоѣ, либо въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи, хотя самое тѣло можетъ еще и вращаться какъ либо вокругъ своего центра инерціи.

Если на всѣ точки системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ, при существованіи между ними внутреннихъ силь взаимодѣйствія, дѣйствуютъ еще и силы тяжести, то центръ инерціи (онъ же центръ тяжести системы) будетъ совершать движение по параболѣ, какъ совершаетъ тяжелая матеріальная точка. Положеніе вершины параболы и величина ея параметра опредѣляются по начальному положенію и начальной скорости центра инерціи (центра тяжести).

Къ этому надо прибавить, что, если представить себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ тяжести, то каждая точка системы будетъ совершать свое особенное относительное движение (по отношенію къ этой средѣ) подъ вліяніемъ приложенныхъ къ ней силь взаимодѣйствія со стороны прочихъ точекъ.

Такимъ образомъ центръ тяжести разорвавшагося на лету снаряда продолжаетъ свое параболическое движеніе и послѣ разрыва, а каждый изъ образовавшихся осколковъ описываетъ иную параболу вслѣдствіе прибавленія къ нему добавочной скорости, сообщенной при разрывѣ.

Если тѣло находится въ покоѣ, то центру инерціи его можетъ быть сообщено движеніе только вслѣдствіе приложенія къ нему какой либо внѣшнія силы, на него дѣйствующей.

Покоющійся на рельсахъ желѣзной дороги паровозъ приходитъ въ