Ocherk

ОЧЕРКЪ

Outlines

teoreticheskoi astronomii

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМІИ.

of Theoretical astronomy

Доктора Митрофана Хандрикова,

Mitrofan Khandrikov

Профессора Университета Св. Владиміра.

КІЕВЪ.

Тип. С. В. Кульженко, Ново-Елисаветинская ул., собств. д.

1883.

По опредѣленію Совѣта Университета Св. Владиміра печатать дозволяется.
11 Февраля 1883 года.

Ректоръ Ив. Рахманиновъ.

Необходимыя данныя для рѣшенія различныхъ астрономическихъ вопросовъ получаются или по опредѣленію направленій свѣтовыхъ лучей, распространяющихся отъ свѣтилъ, или по изученію физико-химическихъ свойствъ этихъ лучей.

Опредѣляя для извѣстныхъ моментовъ направленія свѣтовыхъ лучей, мы получаемъ возможность выводить изъ наблюденій координаты свѣтилъ, отъ которыхъ эти лучи распространяются. Такіе первоначальные результаты наблюденій, послѣ извѣстной обработки, приводятъ насъ къ тѣмъ даннымъ, которыми мы пользуемся для рѣшенія наиболѣе существеннаго астрономическаго вопроса, вопроса о законахъ движенія свѣтилъ въ пространствѣ. Рѣшеніе этого вопроса, поставленнаго въ самой общей формѣ, составляетъ предметъ теоретической астрономіи.

Рѣшеніе задачи о движеніи системы свѣтилъ, находящихся подъ взаимодѣйствіемъ по закону всемірнаго тяготѣнія, зависитъ отъ интегрированія извѣстной системы совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка. Въ настоящее время средства анализа недостаточны для выполненія этого интегрированія въ конечномъ видѣ, а потому при рѣшеніи вопроса мы по необходимости прибѣгаемъ къ болѣе или менѣе искуственнымъ пріемамъ и при извѣстныхъ ограниченіяхъ рѣшаемъ трудную задачу путемъ послѣдовательныхъ приближеній.

Въ первомъ приближеніи движеніе разсматривается какъ происходящее при дѣйствіи одной только центральной силы и затѣмъ, когда интегралы уравненій движенія этой формы найдены, мы ищемъ такія измѣненія введенныхъ интегрированіемъ произвольныхъ постоянныхъ, при которыхъ полученные интегралы удовлетворяли бы не только уравненіямъ этой формы, но и уравненіямъ движенія дѣйствительно происходящаго, движенія обусловливающагося дѣйствіемъ многихъ силъ, изъ которыхъ одна принимается за главную, а остальныя за второстепенныя или возмущающія. Такой способъ трактовать общую задачу приводитъ насъ къ раздѣленію теоретической астрономіи на двѣ части: на теоретическую астрономію понимаемую въ тѣсномъ смыслѣ слова и небесную механику или, правильнѣе, теорію возмущеній. Итакъ только недостатокъ аналитическихъ средствъ является причиной установившагося раздѣленія теоретической астрономіи на двѣ части.

Первая часть содержитъ въ себѣ обзоръ различныхъ видовъ уравненій движенія, интегрированіе уравненій эллиптическаго движенія и все относящееся къ опредѣленію изъ наблюденій постоянныхъ величинъ, введенныхъ этимъ интегрированіемъ. Не трудно составить дифференціальныя уравненія движенія свѣтилъ, не трудно интегрировать уравненія эллиптическаго движенія, происходящаго подъ дѣйствіемъ одной только центральной силы, но не легко опредѣлить изъ наблюденій шесть постоянныхъ введенныхъ интегрированіемъ. Рѣшеніемъ этой задачи исчерпывается почти все содержаніе теоретической астрономіи, понимаемой въ тѣсномъ смыслѣ слова. Многіе первокласные геометры въ прошломъ и настоящемъ столѣтіи трудились надъ рѣшеніемъ этой важной астрономической задачи, но совершенно общаго рѣшенія ея до сихъ поръ мы не имѣемъ.

Ни способъ Гаусса, предложенный для вычисленія эллиптическихъ орбитъ, ни способъ Ольберса, указанный для вычисленія кометныхъ параболическихъ путей не представляютъ собою такаго рѣшенія задачи, которое могло бы примѣняться во всѣхъ случаяхъ и безъ всякихъ ограниченій. При томъ дополненіи, которое первоначально было сдѣлано Бесселемъ, метода Ольберса можетъ съ пользою служить для вычисленія системы элементовъ параболической кометной орбиты только въ случаѣ небольшаго геліоцентрическаго движенія и въ случаѣ недалекихъ одно отъ другаго наблюденій. Если же эти условія въ данномъ случаѣ не выполняются, то послѣдовательныя приближенія сходятся такъ медленно, что для вычисленія извѣстной функціи, представляющей отношеніе двухъ разстояній кометы отъ земли становится необходимымъ тотъ или другой интерполяціонный пріемъ, а отъ примѣненія этого послѣдняго весь способъ утрачиваетъ аналитическій характеръ.

За одно изъ главныхъ условій успѣшнаго примѣненія способа Гаусса слѣдуетъ считать небольшой эксцентриситетъ орбиты, если же это условіе не выполняется, то и при небольшихъ промежуткахъ времени, отдѣляющихъ одно наблюденіе отъ другаго, сходимость въ отдѣльныхъ гипотезахъ весьма не велика. Поэтому способъ Гаусса можно считать вполнѣ пригоднымъ только для вычисленія эллиптическихъ планетныхъ орбитъ; что же касается до эллиптическихъ кометныхъ орбитъ, то вычисленіе ихъ по способу Гаусса, вообще говоря, весьма затруднительно и почти неизбѣжно требуетъ примѣненія интерполяціонныхъ пріемовъ.

Въ новѣйшихъ трактатахъ теоретической астрономіи излагаютъ способы перехода отъ параболической орбиты къ орбитѣ эллиптической значительнаго эксцентриситета, какъ напр. способъ Горнштейна и другіе ему подобные, но эти пріемы вычисленія орбитъ имѣютъ тотъ же характеръ какъ и различные методы предлагавшіеся въ прошломъ и началѣ текущаго столѣтія Лежандромъ для вычисленія кометныхъ орбитъ (A. M. Legendre. Nouvelles methodes pour la determination des orbites des comètes). Всѣ эти способы нельзя однако считать аналитическими.

Но въ какомъ бы положеніи не находилась въ настоящее время теорія опредѣленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ по извѣстному числу наблюденій, способы Ольберса и Гаусса, въ той или другой формѣ доказательства, должны занимать видное мѣсто въ трактатѣ теоретической астрономіи и около нихъ должны группироваться тѣ частные пріемы, къ которымъ приходится прибѣгать въ вопросѣ объ опредѣленіи изъ наблюденій постоянныхъ введенныхъ интегрированіемъ уравненій эллиптическаго движенія.

Вопросъ о движеніи свѣтила мы можемъ считать рѣшеннымъ если представимъ координаты этого свѣтила функціями времени и произвольныхъ постоянныхъ, при томъ подобныя выраженія координатъ должны быть интегралами дифференціальныхъ уравненій движенія составленныхъ, принимая во вниманіе всѣ силы дѣйствующія на разсматриваемое свѣтило какъ главныя, такъ и второстепенныя—возмущающія. Такимъ образомъ задача о движеніи свѣтила будетъ рѣшена, если будутъ найдены интегралы уравненій возмущеннаго движенія. Хотя выполнить это интегрированіе въ конечномъ видѣ до сихъ поръ не удалось, тѣмъ не манѣе въ полномъ очеркѣ теоретической астрономіи не послѣднее мѣсто должно занимать сопоставленіе тѣхъ способовъ, которые до настоящаго времени предлагались для аналитическаго рѣшенія трудной задачи о вычисленіи возмущеній. Какъ на главнѣйшіе изъ этихъ способовъ слѣдуетъ указать на способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, на способъ Якоби, основанный на исключеніи узловъ изъ вопроса о трехъ тѣлахъ, и способъ Гансена первоначально развитый имъ въ мемуарѣ подъ заглавіемъ «Comentatio de corporum coelestium perturbationibus».

Эти попытки аналитическаго рѣшенія трудной задачи о трехъ тѣлахъ всегда будутъ имѣть большое значеніе въ исторіи вопроса о возмущеніяхъ и всегда будутъ интересовать тѣхъ астрономовъ теоретиковъ, которые не ставятъ себѣ конечною цѣлію составленіе того или другаго рецепта для вычисленія орбиты.

Такъ какъ во многихъ случаяхъ за недостаткомъ аналитическихъ способовъ для вычисленія возмущеній приходится прибѣгать къ способу механической квадратуры, т. е. къ вычисленію опредѣленнаго интеграла по частнымъ значеніямъ подъ интегральной функціи, то дополненіемъ всего упомянутаго содержанія теоретической астрономіи должно служить обстоятельное изложеніе методовъ вычисленія такъ называемыхъ спеціальныхъ возмущеній.

Составивъ такое общее представленіе о содержаніи теоретической астрономіи, мы въ послѣдующемъ изложеніи постараемся представить въ наиболѣе простой формѣ тѣ рѣшенія упомянутыхъ вопросовъ, которыя можно считать въ настоящее время за результаты послѣднихъ изысканій въ области изученія движенія свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему.

М. Хандриковъ.

Кіевская
астрономическая Обсерваторія
въ Февралѣ 1883 г.

I.

Дифференціальныя уравненія возмущеннаго и эллиптическаго движенія.

1. Ньютонъ доказалъ, что сферическій однородный слой притягиваетъ точку такъ, какъ бы вся его масса была сосредоточена въ центрѣ. Изъ этого слѣдуетъ, что сплошная однородная сфера притягиваетъ внѣшнюю точку такимъ же образомъ, ибо всю массу такаго тѣла можно раздѣлить на концентрическіе слои. Это положеніе много упрощаетъ теорію движенія свѣтилъ небесныхъ; ибо, обращая вниманіе на большія разстоянія, отдѣляющія одно свѣтило отъ другаго, мы можемъ разсматривать ихъ какъ сферы и вопросъ о движеніи планетъ привести къ вопросу о движеніи матеріальныхъ точекъ. Это допущеніе не имѣетъ однако достаточной строгости при изслѣдованіи движеній спутниковъ. Размѣры спутниковъ не всегда можно считать величинами исчезающими въ сравненіи съ разстояніями спутниковъ отъ планетъ, около которыхъ они движутся, а потому отступленіе формы спутниковъ отъ фигуры сферы должно вліять на ихъ движеніе; очень можетъ быть что неправильностію кометныхъ формъ должна быть объяснена и значительная часть неравенствъ въ движеніи этихъ свѣтилъ, необъяснимыхъ непосредственно притяженіемъ по закону всемірнаго тяготѣнія.

Но такъ какъ въ большинствѣ случаевъ на основаніи указанныхъ положеній вопросъ о движеніи свѣтилъ приводится къ вопросу о движеніи свободныхъ матеріальныхъ точекъ, то мы начнемъ наше изложеніе съ обзора общихъ свойствъ уравненій движенія свободныхъ матеріальныхъ точекъ, находящихся подъ взаимодѣйствіемъ по опредѣленному закону. Въ нашемъ случаѣ по закону всемірнаго тяготѣнія.

Предположимъ, что разсматриваемая система состоитъ изъ n матеріальныхъ точекъ, имѣющихъ массы $m_1\ m_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot m_n$; координаты этихъ точекъ отнесенныя къ произвольной по положенію, но неподвижной въ пространствѣ системѣ осей пусть будутъ

$$x_1\,y_1\,z_1,\ x_2\,y_2\,z_2, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_n\,y_n\,z_n.$$

Разсмотримъ одну какую либо изъ этихъ точекъ, напр. точку имѣющую массу m_i. Пусть составныя по осямъ координатъ всѣхъ силъ дѣйствующихъ на эту точку будутъ $X_i\ Y_i\ Z_i$, тогда, какъ весьма извѣстно изъ началъ механики, уравненія движенія этой свободной точки будутъ

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=X_i\,;\qquad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=Y_i\,;\qquad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=Z_i \tag{1}$$

Предположимъ, что каждая изъ координатъ представляется функціей μ новыхъ перемѣнныхъ $q_1\, q_2 \cdots q_\mu$ и времени t; такъ что

$$x_i=f\,(t\;q_1\,q_2\cdots q_\mu)\,;\qquad y_i=\varphi\,(t\;q_1\,q_2\cdots q_\mu)\,;\qquad z_i=\psi(t\;q_1\,q_2\cdots q_\mu)\,.$$

Умножимъ уравненія движенія (1) соотвѣтственно на производныя

$$\frac{dx_i}{dq_k},\ \frac{dy_i}{dq_k},\ \frac{dz_i}{dq_k}$$

гдѣ подъ k разумѣемъ одно изъ цѣлыхъ чиселъ 1, 2.$\cdots$ μ. Послѣ этого умноженія произведенія сложимъ и полученный результатъ будемъ суммовать по указателю i въ предѣлахъ отъ $i=1$ до $i=n$, тогда найдемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{dx_i}{dq_k}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\,\frac{dy_i}{dq_k}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\,\frac{dz_i}{dq_k}\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[X_i\,\frac{dx_i}{dq_k}+Y_i\frac{dy_i}{dq_k}+Z_i\frac{dz_i}{dq_k}\right] \tag{2}$$

Составляющія дѣйствующей силы по осямъ координатъ, т. е. $X_i\ Y_i\ Z_i$ суть функціи координатъ, эти послѣднія должны быть преобразованы по новымъ перемѣннымъ; послѣ такаго преобразованія вторая часть сдѣлается функціею новыхъ перемѣнныхъ, т. е. $q_1\, q_2\cdots q_\mu$ и времени t.

Положимъ для краткости

$$Q_k=\sum_{i=1}^{i=n}\left[X_i\frac{dx_i}{dq_k}+Y_i\frac{dy_i}{dq_k}+Z_i\frac{dz_i}{dq_k}\right]$$

и замѣтимъ при этомъ, что

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}\cdot\frac{dx_i}{dq_k}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\cdot\frac{dy_i}{dq_k}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\cdot\frac{dz_i}{dq_k}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_k}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{dy_i}{dq_k}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{dz_i}{dq_k}\right]-$$

$$\left[\frac{dx_i}{dt}\;\frac{d\left(\frac{dx_i}{dq_k}\right)}{dt}+\frac{dy_i}{dt}\;\frac{d\left(\frac{dy_i}{dq_k}\right)}{dt}+\frac{dz_i}{dt}\;\frac{d\left(\frac{dz_i}{dq_k}\right)}{dt}\right] \tag{3}$$

примемъ здѣсь

$$\frac{dx_i}{dt}=x_i'\,;\qquad \frac{dy_i}{dt}=y_i'\,;\qquad \frac{dz_i}{dt}=z_i'\,;$$

тогда понятно, что

$$x_i'=\left(\frac{dx_i}{dt}\right)+\frac{dx_i}{dq_1}\,\frac{dq_1}{dt}+\frac{dx_i}{dq_2}\,\frac{dq_2}{dt}+\cdots\cdots+\frac{dx_i}{dq_\mu}\,\frac{dq_\mu}{dt}\,. \tag{4}$$

гдѣ въ первомъ членѣ, производная заключенная въ скобки берется относительно времени входящаго явно въ выраженія координатъ, представляющія ихъ зависимость отъ новыхъ перемѣнныхъ.

Если положимъ для краткости

$$\frac{dq_\kappa}{dt} = q'_\kappa$$

то предыдущее выраженіе принимаетъ видъ

$$(4_*) \qquad x_i' = \left(\frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{dx_i}{dq_1} q'_1 + \frac{dx_i}{dq_2} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{dx_i}{dq_\mu} q'_\mu$$

такъ какъ координаты суть функціи новыхъ перемѣнныхъ q_κ и не содержатъ первыхъ производныхъ этихъ послѣднихъ, то производныя $\frac{dx_i}{dq_\kappa}$ также отнюдь не могутъ содержать производныхъ q'_κ, а потому изъ предыдущаго выраженія заключаемъ, что

$$\frac{dx'_i}{dq'_i} = \frac{dx_i}{dq_\kappa}$$

Дифференцируя производную (4_*) по q_κ, имѣемъ

$$(5) \qquad \frac{dx'_i}{dq_\kappa} = \frac{d^2x_i}{dq_\kappa dt} = \left(\frac{d^2x_i}{dt.dq_\kappa}\right) + \frac{d^2x_i}{dq_1\, dq_\kappa} q_1' + \cdots\cdots + \frac{d^2x_i}{dq_\mu\, dq_\kappa} q'_\kappa$$

Замѣтимъ при этомъ, что перемѣнныя $q_1\ q_2 \cdots\cdots q_\mu$ разсматриваются какъ независимыя.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dq_\kappa} = \frac{df(t\ q_1\ q_2 \cdots q_\mu)}{dq_\kappa} = A_\kappa$$

тогда

$$\frac{d\left(\frac{dx_i}{dq_\kappa}\right)}{dt} = \left(\frac{dA_\kappa}{dt}\right) + \frac{dA_\kappa}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dA_\kappa}{dq_2}\cdot\frac{dq_2}{dt} + \cdots\cdots + \frac{dA_\kappa}{dq_\mu}\cdot\frac{dq_\mu}{dt}$$

Внося сюда вмѣсто A_κ его величину $\frac{dx_i}{dq_\kappa}$, получимъ

$$\frac{d\left(\frac{dx_i}{dq_\kappa}\right)}{dt} = \left(\frac{d^2x_i}{dt.dq_\kappa}\right) + \frac{d^2x_i}{dq_1 dq_\kappa}\ q'_1 + \cdots\cdots + \frac{d^2x_i}{dq_\mu dq_\kappa} q'_\mu.$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (5), заключаемъ, что

$$\frac{d\left(\frac{dx_i}{dt}\right)}{dq_\kappa} = \frac{d\left(\frac{dx_i}{dq_\kappa}\right)}{dt}$$

Слѣдовательно координаты x_i можемъ дифференцировать относительно перемѣнныхъ t и q_κ въ какомъ угодно порядкѣ, т. е. подобно тому какъ въ случаѣ, когда перемѣнныя t и q_κ между собою независимы. Понятно, что тоже заключеніе имѣетъ мѣсто и относительно координатъ y_i и z_i .

Иринимая во вниманіе равенства

$$\frac{dx_i'}{dq_\kappa'}=\frac{dx_i}{dq_\kappa} \quad \text{и} \quad \frac{d\left(\dfrac{dx_i}{dt}\right)}{dq_\kappa}=\frac{d\left(\dfrac{dx_i}{dq_\kappa}\right)}{dt}$$

мы представимъ выраженіе (3) въ видѣ

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{dx_i}{dq_\kappa}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{dy_i}{dq_\kappa}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{dz_i}{dq_\kappa}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[x_i'\frac{dx_i'}{dq'_\kappa}+y_i'\frac{dy'_i}{dq'_\kappa}+z'_i\frac{dz'_i}{dq'_\kappa}\right]-\left(x'_i\frac{dx'_i}{dq_\kappa}+y'_i\frac{dy'_i}{dq_\kappa}+z'_i\frac{dz'_i}{dq_\kappa}\right)$$

Означимъ чрезъ T живую силу системы, т. е. положимъ

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x'^2_i+y'^2_i+z'^2_i)$$

и послѣ этого, обращая вниманіе на предыдущее равенство, приведемъ уравненіе (2) къ виду

$$\frac{d\left(\dfrac{dT}{dq'_\kappa}\right)}{dt}-\frac{dT}{dq_\kappa}=Q_\kappa$$

Пусть

$$\frac{dT}{dq'_\kappa}=p_\kappa$$

тогда

$$\frac{dp_\kappa}{dt}-\frac{dT}{dq_\kappa}=Q_\kappa. \tag{6}$$

Это и есть одна изъ извѣстныхъ формъ уравненій движенія.

2. Если составляющія дѣйствующихъ силъ по осямъ координатъ, т. е. X_i , Z_i Y_i могутъ быть представлены частными производными одной и той же функціи, обыкновенно называемой силовою функціею, то предыдущее уравненіе движенія можетъ быть приведено къ болѣе простой формѣ. Предположимъ, что силовая функція для разсматриваемаго случая существуетъ, означимъ ее чрезъ U; тогда уравненія движенія массы m_i будутъ

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{dU}{dx_i}, \quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{dU}{dy_i}; \quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{dU}{dz_i} \tag{7}$$

ибо при существованіи силовой функціи

$$X_i = \frac{dU}{dx_i}, \qquad Y_i = \frac{dU}{dy_i}, \qquad Z_i = \frac{dU}{dz_i}$$

Имѣя это, можемъ написать выраженіе функціи Q_κ въ видѣ

$$Q_\kappa = \frac{dU}{dq_\kappa}$$

а слѣдовательно найденное уравненіе движенія приметъ форму

$$\frac{dp_\kappa}{dt} = \frac{d(T+U)}{dq_\kappa}. \tag{8}$$

Если уравненія (7) умножимъ соотвѣтственно на $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$, сложимъ ихъ и результатъ будетъ суммовать для всѣхъ массъ системы, то найдемъ

$$\sum m_i \left[\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{dx_i}{dt} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{dy_i}{dt} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{dz_i}{dt}\right] = \sum \left\{\frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{dU}{dy_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{dU}{dz_i}\frac{dz_i}{dt}\right\}$$

Это уравненіе интегрируется непосредственно и интегралъ его есть

$$\frac{1}{2}\sum m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = U + H$$

гдѣ H есть постоянная величина введенная интегрированіемъ. По принятому означенію это уравненіе приводится къ виду

$$T = U + H$$

такое соотношеніе представляетъ собою правило живыхъ силъ, заключающееся въ томъ, что живая сила системы разнится отъ силовой функціи на постоянную величину.

И такъ мы видимъ, что для свободной системы слѣдствіемъ существованія, силовой функціи является интегралъ живыхъ силъ.

3. Предположимъ что соотношенія между перемѣнными x_i y_i z_i и q_κ не содержатъ явно времени t, тогда по выраженію (4_*) имѣемъ

$$x_i' = \frac{dx_i}{dq_1} q_1' + \frac{dx_i}{dq_2} q_2' + \cdots\cdots + \frac{dx_i}{dq_\mu} \cdot q'_\mu$$

если внесемъ это выраженіе x'_i и ему подобныя для y'_i z'_i въ выраженіе T живой силы системы, то это выраженіе T сдѣлается однородной функціей втораго измѣренія относительно производныхъ $q'_1\ q'_2 \cdots q'_\mu$. Дифференцируя такое преобразованное выраженіе T по q'_κ, мы найдемъ что производныя

$$\frac{dT}{dq'_\kappa}$$

или что все равно p_κ, будутъ линейными функціями отъ q'_κ. Но если T есть однородная функція втораго измѣренія относительно q'_κ, то по свойству такихъ функцій имѣемъ

$$2T = \frac{dT}{dq'_1} q'_1 + \frac{dT}{dq'_2} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{dT}{dq'_\mu}.$$

удерживая сдѣланныя означенія, можемъ это представить въ видѣ

$$T = \sum_{k=1}^{k=\mu} q'_k p_k - T.$$

Выраженіе T должно быть разсматриваемо какъ функція q_k и q'_k при этомъ перемѣнныя q_k входятъ въ функцію T въ зависимости отъ производныхъ

$$\frac{dx_i}{dq_k}, \quad \frac{dy_i}{dq_k}, \quad \frac{dz_i}{dq_k}$$

Принимая это во вниманіе, возмемъ отъ предыдущаго уравненія полной дифференціалъ по всѣмъ перемѣннымъ и тогда получимъ

$$dT = \sum q'_k\ dp_k + \sum p_k\ dq'_k - \sum \frac{dT}{dq'_k}\ dq'_k - \sum \frac{dT}{dq_k}. dq_k$$

гдѣ знаки суммъ распространяются на всѣ значенія k отъ 1 до μ. Два средніе члена этого выраженія взаимно уничтожаются и мы имѣемъ

$$dT = \sum q'_k\ dp_k - \sum \frac{dT}{dq_k}\ dq_k. \tag{9}$$

мы сейчасъ замѣтили что всѣ p_k суть линейныя функціи отъ $q'_1\ q'_2 \cdots q'_\mu$. Обратно эти послѣднія по этимъ соотношеніямъ могутъ быть представлены функціями отъ $p_1\ p_2 \cdots p_\mu$ И такъ если выраженіе T представляется въ видѣ

$$(A) \qquad T = f\ (q_k\,,\ q'_k)$$

то по соотношеніямъ между p_k и q_k изъ него могутъ быть исключены q'_k и оно представится въ формѣ

$$(B) \qquad T = F\ (q_k,\ p_k)$$

Взявъ отсюда полный дифференціалъ, имѣемъ

$$dT = \sum \left(\frac{dT}{dq_k}\right) dq_k + \sum \frac{dT}{dp_k} dp_k$$

производныя взятыя относительно q_k мы заключаемъ въ скобки для того, чтобы отличить случай, въ которомъ T разсматривается какъ функція вида (A), отъ того случая, въ которомъ живой силѣ системы дается видъ функціи (B); производныя заключенныя въ скобки соотвѣтствуютъ этому второму случаю.

Предыдущее выраженіе должно быть тождественно съ выраженіемъ (9), а потому коеффиціенты при одинакихъ дифференціалахъ въ томъ и другомъ должны быть равны. По этому условію

$$\frac{dT}{dp_\kappa} = q'_\kappa\,; \qquad \left(\frac{dT}{dq_\kappa}\right) = -\frac{dT}{dq_\kappa}.$$

По второму изъ этихъ уравненій, мы можемъ привести уравненіе (6) къ виду

$$\frac{dp_\kappa}{dt} = Q_\kappa - \left(\frac{dT}{dq_\kappa}\right)$$

Но такъ какъ

$$Q_\kappa = \frac{dU}{dq_\kappa}$$

то

$$\frac{dp_\kappa}{dt} = \frac{dU}{dq_\kappa} - \left(\frac{dT}{dq_\kappa}\right)$$

мы знаемъ, что U совсѣмъ не содержитъ q'_κ, а слѣдовательно и p_κ, по этому предыдущее можно представить въ видѣ

(11) $$\frac{dp_\kappa}{dt} = -\frac{d(T-U)}{dq_\kappa}$$

если предполагаемъ, что силовая функція существуетъ, то правило живыхъ силъ имѣетъ мѣсто, по этому

$$T - U = H$$

и такъ какъ какъ U не содержитъ p_κ, то отсюда находимъ

$$\frac{dT}{dp_\kappa} = \frac{dH}{dp_\kappa}$$

а потому первое изъ уравненій (10) и уравненіе (11) приводятся къ виду

(12) $$\frac{dq_\kappa}{dt} = \frac{dH}{dp_\kappa}\,; \qquad \frac{dp_\kappa}{dt} = -\frac{dH}{dq_\kappa}.$$

Въ такой формѣ *Гамильтонъ* представилъ уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ подверженныхъ дѣйствію притягательныхъ силъ. Эти уравненія извѣстны также подъ именемъ конончіеской системы уравненій движенія.

4. Примѣнимъ эти общія соображенія къ случаю дѣйствія силы притяженія по закону Ньютона.

Каждое свѣтило солнечной системы находится подъ дѣйствіемъ одной главной центральной силы и нѣсколькихъ второстепенныхъ, возмущающихъ, которыя, вообще говоря, малы въ сравненіи съ главной, ибо главная пропорціональна массѣ солнца, а возмущающія пропорціональны массамъ отдѣльныхъ планетъ, составляющихъ систему, но масса самой большой изъ планетъ, именно Юпитера, въ тысячу разъ менѣе массы солнца. Извѣстно, что если какое нибудь явленіе производится совокупностью извѣстныхъ силъ, отдѣльное дѣйствіе которыхъ достаточно мало, то совокупность дѣйствія всѣхъ этихъ малыхъ силъ можно разсматривать какъ сумму дѣйствій каждой силы отдѣльно. На основаніи этого соображенія, можно при рѣшеніи вопроса о движеніи какой либо планеты или кометы разсматривать сначала одну только возмущающую силу, объусловливающуюся дѣйствіемъ одной какой либо изъ всѣхъ остальныхъ планетъ, примѣняя потомъ тѣже соображенія къ каждой изъ всѣхъ остальныхъ планетъ системы, составимъ себѣ понятіе о возмущеніяхъ въ движеніяхъ разсматриваемаго свѣтила, объусловливающихся совокупностію дѣйствія всѣхъ возмущающихъ планетъ

Итакъ вопросъ о движеніи планетъ и кометъ приводится къ вопросу о движеніи трехъ тѣлъ: солнца, разсматриваемаго свѣтила и одной изъ возмущающихъ планетъ. Главный вопросъ небесной механики, представленный въ этомъ видѣ, извѣстенъ подъ именемъ *задачи о трехъ тѣлахъ* (Probléme des trois corps).

Чтобы примѣнить предыдущія общія соображенія къ рѣшенію этой задачи, составимъ прежде всего функціи X_i Y_i Z_i, входящія въ уравненія (1). Пусть массы трехъ разсматриваемыхъ тѣлъ будутъ m_0 m_1 m_2 Такимъ образомъ въ предыдущихъ выраженіяхъ подъ i мы будемъ разумѣть числа 0,1,2. Координаты этихъ массъ (сосредоточеныхъ въ центрѣ тяжести каждаго изъ разсматриваемыхъ тѣлъ) отнесенныя къ неподвижнымъ въ пространствѣ прямоугольнымъ осямъ, имѣющимъ произвольное начало и положеніе, пусть будутъ соотвѣтственно x_0 y_0 z_0 , x_1 y_1 z_1 ,. x_2 y_2 z_2 . Составимъ сначала по типу (7) дифференціальныя уравненія движенія массы m_0 ; что будемъ говорить о движеніи этой массы, то легко будетъ примѣнимо и къ двумъ другимъ. На массу m_0 дѣйствуютъ двѣ силы: одна отъ m_1 , другая отъ m_2 . Величина силы дѣйствующей по закону Ньютона отъ массы m_1 на массу m_0 есть

$$\frac{k^2 m_1}{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

гдѣ k^2 есть притяженіе единицы массы на единицѣ разстоянія, или Гаусcово постоянное число. Подобнымъ же образомъ сила дѣйствующая отъ массы m_2 на массу m_0 представляется въ видѣ

$$\frac{k^2 m_2}{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}$$

чтобы составить по этимъ силамъ функцію X_0 , т. е. проложеніе на ось x составной всѣхъ силъ дѣйствующихъ на массу m_0 , стоитъ только проложить эти силы на ось x и взять ихъ сумму. Косинусы угловъ, каторые составляютъ направленія этихъ силъ съ осью x, суть очевидно

$$\frac{-(x_0-x_1)}{\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}} \text{ и } \frac{-(x_0-x_2)}{\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}}$$

потому въ уравненіи движенія массы m_0 составленномъ по формѣ (1)

$$X_0 = \frac{k^2 m_1 (x_1-x_0)}{[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{k^2 m_2 (x_2-x_0)}{[(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Легко видѣть, что въ разсматриваемомъ случаѣ силовая функція существуетъ и имѣетъ видъ

$$(13)\qquad F=\frac{k^2m_0m_1}{\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2-(z_0-z_1)^2}}+$$
$$\frac{k^2m_0m_2}{\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}}+\frac{k^2m_1m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$$

Въ самомъ дѣлѣ легко видѣть, что при этомъ

$$X_0=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dx_0}$$

подобнымъ же образомъ легко составить проложенія на двѣ другія оси координатъ составной силы дѣйствующей на массу m_0 ; они будутъ

$$Y_0=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dy_0};\qquad Z_0=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dz_0}$$

слѣдовательно уравненія движенія массы m_0 будутъ

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dx_0};\qquad \frac{d^2y_0}{dt^2}=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dy_0};\qquad \frac{d^2z_0}{dt^2}=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dz_0}$$

подобнымъ же образомъ движенія массъ m_1 и m_2 будутъ представлены уравненіями

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{1}{m_1}\frac{dF}{dx_1};\qquad \frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{1}{m_1}\frac{dF}{dy_1};\qquad \frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{1}{m_1}\frac{dF}{dz_1}$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{1}{m_2}\frac{dF}{dx_2};\qquad \frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{1}{m_2}\frac{dF}{dy_2};\qquad \frac{d^2z_2}{dt^2}=\frac{1}{m_2}\frac{dF}{dz_2}.$$

Такимъ образомъ движеніе трехъ точекъ m_0 m_1 m_2 относительно неподвижнаго начала координатъ представляется девятью уравненіями втораго порядка. Число уравненій понижается тремя, если будемъ разсматривать движеніе двухъ массъ относительно третей. Такъ какъ мы имѣемъ въ виду изучать движеніе свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему, относительно центральнаго тѣла солнца, то мы и будемъ главнымъ образомъ изслѣдовать движеніе двухъ массъ относительно третей, будемъ разсматривать движеніе возмущеннаго и возмущающаго свѣтила относительно центра солнца. Предположимъ, что m_2 представляетъ массу солнца. Примемъ точку, въ которой сосредоточена эта масса за начало координатъ и чрезъ это подвижное начало проведемъ прямоугольныя оси параллельныя предыдущимъ неподвижнымъ. Означимъ координаты массъ m_0 и m_1 относительно этихъ новыхъ подвижныхъ осей чрезъ x y z, x' y' z'. Тогда понятно, что

$$(14)\qquad \begin{aligned} x&=x_0-x_2 & x'&=x_1-x_2\\ y&=y_0-y_2 & y'&=y_1-y_2\\ z&=z_0-z_2 & z'&=z_1-z_2 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x_0}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2} \qquad \frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y_0}{dt^2}-\frac{d^2y_2}{dt^2} \qquad \frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2}-\frac{d^2y_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2z_0}{dt^2}-\frac{d^2z_2}{dt^2} \qquad \frac{d^2z'}{dt^2}=\frac{d^2z_1}{dt^2}-\frac{d^2z_2}{dt^2}.$$

Принимая массу m_2 за единицу, въ которой будемъ выражать всѣ другія массы, внесемъ въ эти уравненія вмѣсто вторыхъ производныхъ $\frac{d^2x_0}{dt^2}$, $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2x_2}{dt^2}$, $\frac{d^2y_0}{dt^2}$ и т. д. ихъ выраженія изъ показанныхъ сейчасъ уравненій движенія. Тогда получимъ

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dx_0}-\frac{dF}{dx_2} \qquad & \frac{d^2x'}{dt^2}&=\frac{1}{m_1}\frac{dF}{dx_1}-\frac{dF}{dx_2}\\
\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dy_0}-\frac{dF}{dy_2} \qquad & \frac{d^2y'}{dt^2}&=\frac{1}{m_1}\frac{dF}{dy_1}-\frac{dF}{dy_2}\\
\frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{1}{m_0}\frac{dF}{dz_0}-\frac{dF}{dz_2} \qquad & \frac{d^2z'}{dt^2}&=\frac{1}{m_1}\frac{dF}{dz_1}-\frac{dF}{dz_2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Таковы уравненія движенія массъ m_0 и m_1 относительно массы m_2; но эти уравненія должны быть преобразованы такъ чтобы въ нихъ входили только координаты считаемыя относительно новыхъ подвижныхъ осей. Чтобы представить силовую функцію F въ зависимости отъ новыхъ координатъ, замѣтимъ что выраженія (14) даютъ

$$\begin{aligned}
x-x'&=x_0-x_1\\
y-y'&=y_0-y_1\\
z-z'&=z_0-z_1
\end{aligned}$$

принимая во вниманіе это, а также и уравненія (13) представляемъ силовую функцію F въ видѣ

$$F=\frac{k^2m_0m_1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\frac{k^2m_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{k^2m_1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

или

$$F=\frac{k^2m_0m_1}{\rho}+\frac{k^2m_0}{r}+\frac{k^2m_1}{r'} \tag{16}$$

гдѣ подъ ρ разумѣемъ взаимное разстояніе возмущеннаго и возмущающаго свѣтилъ, подъ r радіусъ векторъ возмущеннаго и подъ r' радіусъ векторъ возмущающаго свѣтила

Первоначально мы представляли F функціею координатъ $x_0\ y_0\ z_0$, $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, теперь, какъ видимъ, F зависитъ отъ $x\ y\ z$, $x'\ y'\ z'$, поэтому тождественно имѣемъ