Дифференціальная Геометрія.

КУРСЪ ЛЕКЦІЙ

по приложеніямъ дифференціальнаго исчисленія къ геометріи

заслуженнаго ординарнаго профессора

А. В. ВАСИЛЬЕВА,

ЧИТАННЫЙ

*въ Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ
въ 1904 году.*

По лекціямъ и подъ редакціей профессора составилъ студентъ *Н. Н. Іовлевъ.*

Изданіе студентовъ.

КАЗАНЬ
Типо-Литографія В. М. Ключникова.
1905.

Дозволено цензурою. Г. Казань, 5 апрѣля 1905 года.

„Въ природѣ“, говоритъ Лобачевскій, **„мы познаемъ собственно только движеніе, безъ котораго чувственныя впечатлѣнія невозможны. Всѣ прочія понятія, напримѣръ геометрическія, произведены нашимъ умомъ искусственно, будучи взяты въ свойствахъ движенія, а потому пространство, само собой, отдѣльно для насъ не существуетъ“**. Наблюденіе свойствъ движеній даетъ намъ *искусственно* (т. е. идеализаціею замѣчаемыхъ нами соотношеній между матеріальными точками, прямыми и плоскостями) небольшое число простыхъ основныхъ истинъ, которыя мы называемъ *аксіомами геометріи*. Исходя изъ этихъ аксіомъ, геометрія имѣетъ своею цѣлью привести въ упорядоченную систему всѣ соотношенія, существующія между геометрическими фактами, какъ бы сложны они ни были и къ сколь бы сложнымъ фигурамъ они ни относились. При этомъ упорядоченіи, т. е. при выводѣ новыхъ соотношеній изъ основныхъ аксіомъ, геометрія пользуется общими законами нашей мысли, изучаемыми въ логикѣ. Путь, которымъ законы мысли прилагаются къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ, можетъ быть различенъ.

Мы можемъ или непосредственно изучать геометрическія фигуры, или же прилагать къ ихъ изученію предварительно построенное на тѣхъ же законахъ мысли ученіе о числахъ или чистую математику. Начальная геометрія пользуется первымъ методомъ, методомъ чисто геометрическимъ или *синтетическимъ*. Тѣмъ же методомъ построилъ Лобачевскій свою неевклидову геометрію. Наконецъ, этими же методами пользуется проэктивная геометрія. Синтетическіе методы, какъ говоритъ Шаль, часто доставляютъ наиболѣе простой и естественный путь, который, доходя до начала истинъ, разоблачаетъ таинственную связь, соединяющую ихъ между собою и выставляетъ ихъ наиболѣе ясно и полно.

Но наиболѣе важные успѣхи геометріи связаны съ другимъ путемъ, путемъ аналитическимъ, т. е. съ примѣненіемъ къ изученію геометрическихъ вопросовъ ученія о числахъ и ихъ функціяхъ. Геометрія преимущественно передъ всѣми другими науками, изучающими явленія окружающаго насъ внѣшняго міра, къ которому относится и наше собственное тѣло, издавна находилась въ самой тѣсной связи съ чистою математикою. Конкретное представленіе алгебраическихъ формулъ на геометрическихъ фигурахъ предшествовало нахожденію самихъ формулъ. Наши теперешнія алгебраическія формулы и преобразованія замѣнялись у греческихъ геометровъ геометрическими преобразованіями (Начала Евклида, книга 2-ая, 5-ая, 10-ая). Но когда у индійскихъ математиковъ (VI и смежныхъ столѣтій), у арабскихъ (IX и слѣдующихъ столѣтій) и у европейскихъ (съ конца 15-го вѣка) стала развиваться самостоятельно алгебра, то параллельно съ ея развитіемъ шло и приложеніе ея къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ и, наконецъ, въ знаменитой геометріи Декарта мы находимъ вполнѣ развитою великую мысль приложенія алгебры къ геометрическимъ вопросамъ и представленія геометрическихъ фигуръ аналитическими выраженіями.

Систематическая доктрина рѣшенія вопросовъ геометріи съ помощью ученія о числахъ основывается на методѣ координатъ.

Методъ координатъ въ своемъ первоначальномъ видѣ, когда за геометрическій элементъ принималась исключительно точка, опредѣлявшаяся двумя или тремя числами, не отличался достаточною общностью и, поэтому, при рѣшеніи многихъ вопросовъ уступалъ синтетическимъ методамъ. Плюкеру принадлежитъ одна изъ тѣхъ геніальныхъ мыслей, которыя дѣлаютъ переворотъ въ наукѣ—мысль расширить понятіе о геометрическомъ элементѣ, опредѣляемомъ системою нѣсколькихъ чиселъ и разсматривать, какъ такой элементъ, прямую или плоскость (введеніе тангенціальныхъ координатъ), прямую въ пространствѣ (см. § 105, 107). Такое расширеніе метода координатъ, уже дало результаты величайшей важности и обѣщаетъ дать еще больше. Ученіе о числахъ распадается на алгебру или вычисленіе конечныхъ и на анализъ безконечно-малыхъ. Приложеніе той части алгебры, которая носитъ названіе теоріи формъ, даетъ возможность рѣшить многіе вопросы, относящіеся до теоріи алгебраическихъ кривыхъ и поверхностей. Но общіе вопросы геометріи требуютъ приложенія анализа безконечно-малыхъ.

Анализъ безконечно-малыхъ состоитъ изъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Въ настоящемъ курсѣ излагаются основанія *дифференціальной геометріи* т. е. того отдѣла геометріи, который основывается на приложеніи дифференціальнаго исчисленія.

Къ этому отдѣлу относятся важные вопросы о касательныхъ линіяхъ и плоскостяхъ, о кривизнѣ линій и поверхностей.

Геометрія двухъ и трехъ измѣреній, разсмотренная съ аналитической точки зрѣнія, является частнымъ случаемъ болѣе общей науки—геометріи многихъ измѣреній, обобщающей понятія обычной геометріи; такъ понятіе о кривизнѣ линій и поверхностей обобщается въ понятіи о кривизнѣ пространства, дающемъ ключъ къ истолкованію стереометріи Лобачевскаго.

2 Апрѣля, 1905 г.

А. Васильевъ.

ПРИЛОЖЕНІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ КЪ ГЕОМЕТРІИ.

ПЛОСКІЯ КРИВЫЯ.

§ 1. Касательная.

Возьмемъ на кривой, ур—іе коей (1) $F(X,У)=0$, точку $P(x.y)$. а въ сосѣдствѣ съ ней точку M, координаты которой равны $X, У$. Пусть точка $P(x,y)$ неизмѣнна, а $M(X,У)$ безконечно приближается къ P.

Такъ какъ точка M взята на кривой, то ея координаты должны удовлетворять ур—ію кривой, т. е. $F(X,У)=0$. X и $У$ можно выразить такимъ образомъ:

$$X = x + (X-x),\ У = y + (У-y);$$

тогда $$F(X,У) = F[x+(X-x),\ y+(У-y)] = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Разлагая по степенямъ разностей $(X-x)$ и $(У-y)$, получимъ по формулѣ Тэйлора:

$$F(X,У) = F(x,y) + (X-x)\frac{dF}{dx} + (У-y)\frac{dF}{dy} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[(X-x)^2\frac{d^2F}{dx^2} + 2(X-x)(У-y)\frac{d^2F}{dxdy} + (У-y)^2\frac{d^2F}{dy^2}\right] + R_3 = 0, \quad (3)$$

гдѣ R_3—остаточный членъ—представляетъ совокупность членовъ разложенія 3,4 и высшихъ порядковъ.

Точка $P(x,y)$ лежитъ на кривой (1), почему $F(x,y)=0$.

Пренебрегая членами 2,3 и т. д. порядковъ, мы получимъ изъ (3):

$$(X-x)\frac{dF}{dx} + (У-y)\frac{dF}{dy} = 0. \quad (4)$$

Это есть ур—іе нѣкоторой прямой, которая носитъ названіе *касательной* [1]) линіи къ кривой $F(X,У)=0$ въ точкѣ $P(x,y)$. Такое названіе эта прямая получила потому, что без-

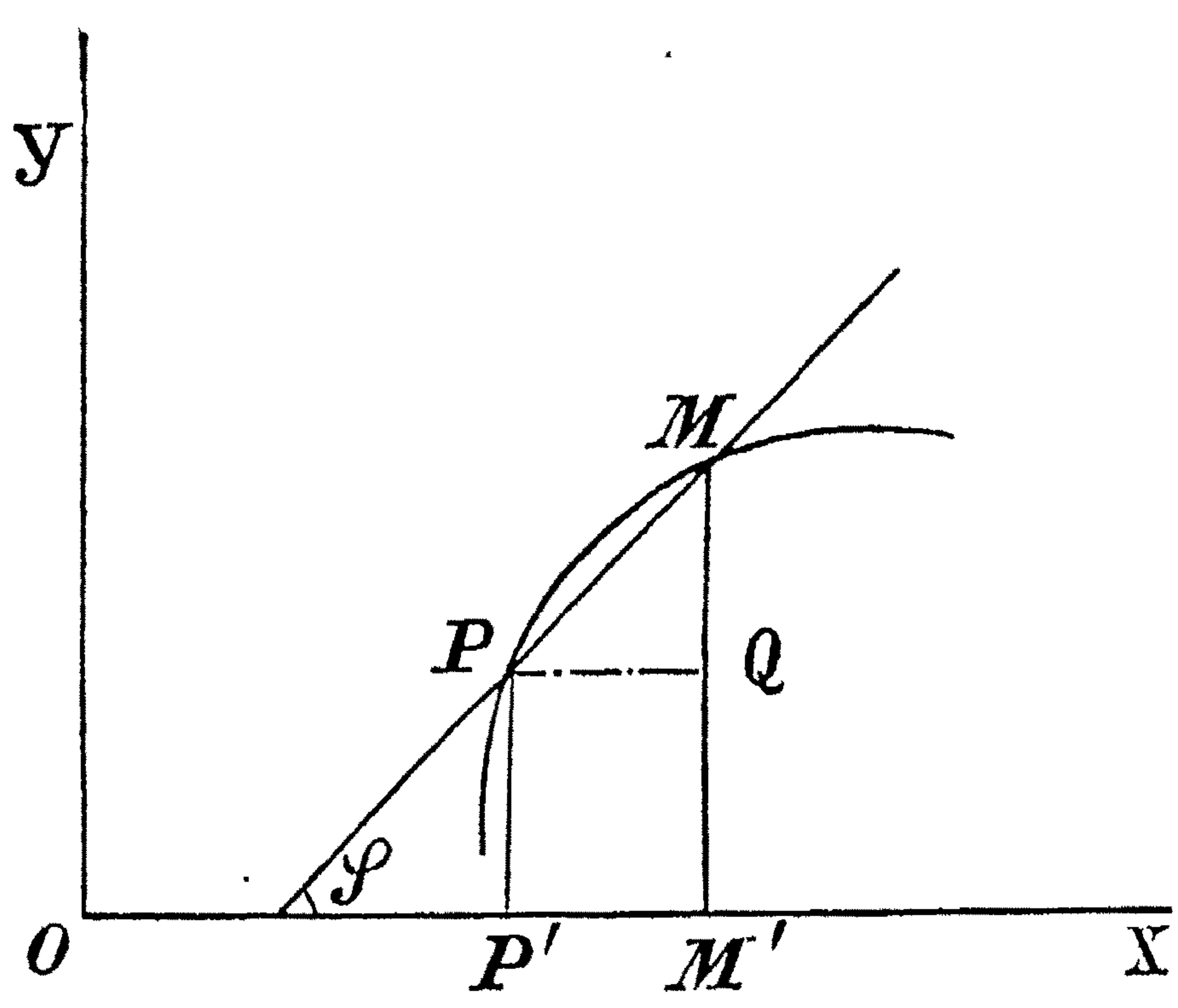

рис. 1

[1]) Касательная PT на чертежѣ не обозначена.

конечно—малый отрѣзокъ ея въ сосѣдствѣ съ точкою P совпадаетъ съ безконечно-малымъ отрѣзкомъ кривой. [1])

Точка P называется *обыкновенной*, если уравненіе (4) существуетъ, т. е. если въ точкѣ P можно провести одну опредѣленную касательную.

Обыкновенныя точки.

§ 2. Для того, чтобы P была обыкновенной точкою, необходимы два условія:

1) чтобы всѣ частныя производныя $F(x,y)$

$$\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{d^2F}{dx^2}, \frac{d^2F}{dy^2}, \frac{d^2F}{dxdy}, \ldots \tag{5}$$

имѣли конечное и опредѣленное значеніе и 2) чтобы $\frac{dF}{dx}$ и $\frac{dF}{dy}$ не были одновременно равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, если не соблюдено 1-е условіе, то члены $(X-x)\frac{dF}{dx}+(Y-y)\frac{dF}{dy}$ могутъ быть не единственными членами 1-го порядка. Если же не соблюдено 2-е условіе, т. е. $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, то ур—іе (4) обращается въ тождество $0=0$.

§ **3. Теорема**. *Свойство точки быть обыкновенной не зависитъ отъ выбора системы координатъ.*

Доказательство. Возьмемъ эту точку въ другой системѣ Декартовыхъ координатъ. Тогда, изъ Аналитической геометріи извѣстно, что прежнія координаты (x,y) будутъ связаны съ новыми (x_1,y_1) такимъ образомъ:

$$X=ax_1+a_1y_1+\alpha,\ y=bx_1+b_1y_1+\beta. \tag{6}$$

Уравненіе кривой въ новой системѣ координатъ будетъ:

$$F(ax_1+a_1y_1+\alpha, bx_1+b_1y_1+\beta)=F_1(x_1y_1)=0. \tag{7}$$

Опредѣлимъ $\frac{dF}{dx_1}$ и $\frac{dF}{dy_1}$, замѣчая изъ (6), что $\frac{dx}{dx_1}=a$, $\frac{dy}{dy_1}=b$ и т. д.

[1]) Это видно изъ сравненія ур. (3) и (4). X, Y въ этихъ ур—іяхъ имѣютъ разное значеніе, но „вблизи" точки $P(x,y)$, когда $(X-x)$, $(Y-y)$ дѣлаются безконечно-малыми перваго порядка, *полное* ур—іе (3), замѣняется *неполнымъ* (4), что справедливо для всѣхъ точекъ кривой и касательной безконечно близкихъ къ P.

Получимъ:

$$\frac{dF_1}{dx_1}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dx_1}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx_1}=a\frac{dF}{dx}+b\frac{dF}{dy} \tag{8}$$

$$\frac{dF_1}{dy_1}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dy_1}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dy_1}=a_1\frac{dF}{dx}+b_1\frac{dF}{dy}$$

$$\frac{d^2F_1}{dx_1{}^2}=a^2\cdot\frac{d^2F}{dx^2}+2ab\frac{d^2F}{dxdy}+b^2\cdot\frac{d^2F}{dy^2}$$

. . . .

Пользуясь первымъ условіемъ § 2, мы найдемъ, что

$$\frac{dF_1}{dx_1},\ \frac{dF_1}{dy_1},\ \frac{d^2F_1}{dx_1dy_1},\ \frac{d^2F_1}{dx_1{}^2},\ \frac{d^2F_1}{dy_1{}^2},\ \ldots$$

имѣютъ конечныя и опредѣленныя значенія; переходя ко 2-му условію, видимъ, что $\frac{dF}{dx_1}$ и $\frac{dF_1}{dy_1}$ не могутъ одновременно равняться нулю, такъ какъ не равны нулю одновременно $\frac{dF}{dx}$ и $\frac{dF}{dy}$.

И такъ, точка P, бывшая обыкновенной при координатахъ x и y, осталась таковой же и при новыхъ. Всякая точка, координаты которой не удовлетворяютъ условіямъ 1) и 2), называется особенной.

Особенныя точки.

§ 4. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда точка $P(x,y)$ не есть обыкновенная точка кривой $F(X,Y)=0$.

Это можетъ быть въ томъ случаѣ, когда не соблюдается одно или оба условія. Остановимся на томъ случаѣ, когда $\frac{dF}{dx}$ и $\frac{dF}{dy}$ одновременно обращаются въ нуль; тогда ур—іе (3) обратится въ

$$F(X,Y)=\frac{1}{2}\left[(X-x)^2\cdot\frac{d^2F}{dx^2}+2(X-x)(Y-y)\frac{d^2F}{dx\,dy}+(Y-y)^2\cdot\frac{d^2F}{dy^2}\right]+R_3=0 \tag{9}$$

или, ограничиваясь производными второго порядка, получимъ:

$$(X-x)^2\cdot\frac{d^2F}{dx^2}+2(X-x)(Y-y)\frac{d^2F}{dx\,dy}+(Y-y)^2\cdot\frac{d^2F}{dy^2}=0. \quad (10)$$

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что ур—іе такого вида выражаетъ пару прямыхъ, пересѣкающихся въ точкѣ P. Безконечно-малые отрѣзки этихъ прямыхъ совпадаютъ съ кривой.

Производныя $\frac{d^2F}{dx^2}$, $\frac{d^2F}{dxdy}$, $\frac{d^2F}{dy^2}$ извѣстны, и ур—іе (10) можно написать такимъ образомъ:

$$A\,(X-x)^2 + 2\,B\,(X-x)\,(У-y) + C\,(У-y)^2 = 0; \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(11)$$

изъ него легко получить отношеніе $\frac{У-y}{X-x}$, выражающее тангенсъ угла, образуемаго прямой съ осью абсциссъ, если X, У координаты точки данной *прямой.*

Обозначая $\frac{У-y}{X-x}$ черезъ ζ, мы преобразуемъ наше ур—іе въ такое:

$$A + 2\,B\zeta + C\zeta^2 = 0. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(12)$$

Здѣсь могутъ встрѣтиться три случая: 1) когда корни ур—ія дѣйствительные, 2) когда корни ур—ія мнимые и, наконецъ, 3) когда корни равные. Разсмотримъ каждый случай отдѣльно.

1) *Корни* ур—ія (11) ζ_1 и ζ_2 *дѣйствительны*, и $\mathrm{tg}\,\varphi$ имѣетъ 2 значенія. Въ этомъ случаѣ кривая въ данной точкѣ $P(x,y)$, которая называется *двойной* точкой кривой $F(x,y)=0$, будетъ сливаться съ двумя прямыми, т. е. имѣть двѣ касательныхъ (рис. 2[a]).

2) Когда корни ζ_1 и ζ_2 *мнимые* то ни одна изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ P, не будетъ имѣть точекъ общихъ съ кривой: случай такъ называемой *изолированной*, или уединенной точки, которой координаты удовлетворяютъ ур—ію кривой, хотя точка и не находится на ней. Въ такой точкѣ касательной къ кривой, очевидно, провести нельзя, почему ζ_1, ζ_2 —$\mathrm{tg}\,\varphi$—мнимы.

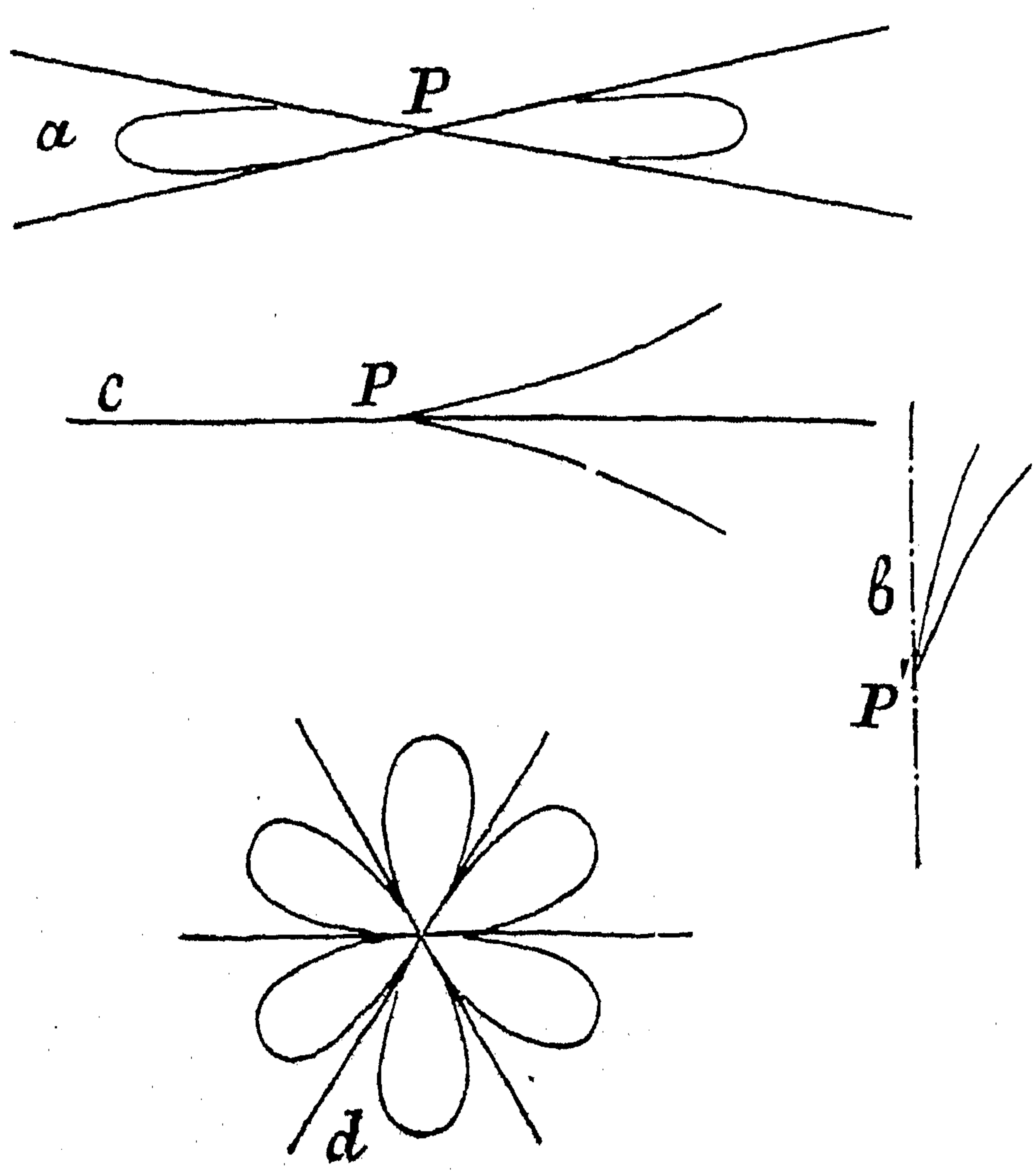

рис. 2.

3) Корни *равные* $\zeta_1 = \zeta_2$. Этотъ случай даетъ точку *возврата* плоской кривой; такъ называется точка, въ которой двѣ вѣтви кривой имѣютъ *общую касательную*, при чемъ обѣ вѣтви кривой могутъ быть или по одну сторону касательной (рис. 2[в]), или напротивъ (рис. 2[с]), по обѣ.

§ 5 Возьмемъ теперь наиболѣе общій случай. Положимъ, что координаты точки $P(x,y)$ обращаютъ въ нуль производныя до $(n-1)$-го порядка включительно, но производная n—го порядка въ нуль не обращается.

Тогда развернувъ ур. (3) построкѣ Тэйлора и отбросивъ члены равные нулю, получимъ ур—іе вида.

$$F(X,У)=(X-x)^n A_1+(X-x)^{n-1}(У-y)A_2+\ldots+(У-y)^n A_n+R_{n+1}=0\ . \quad (13)$$

Параллельно съ этимъ уравненіемъ разсмотримъ ур—іе

$$(X-x)^n A_1+(X-x)^{n-1}(У-y)A_2+\ldots+(У-y)^n A_n=0 \quad (14)$$

Это ур—іе, какъ однородное относительно разностей $(X-x)$ и $(У-y)$, представляетъ совокупность n прямыхъ (дѣйствительныхъ или мнимыхъ), проходящихъ черезъ точку $P(x,y)$.

Раздѣляя всѣ члены на $(X-x)^n$, мы получимъ ур—іе n—ой степени относительно $\frac{У-y}{X-x}$. Искомое отношеніе $\frac{У-y}{X-x}$ представляетъ tg угла между прямой и осью X—овъ, а такъ какъ ур—іе n—ой степени, то и значеній для $\frac{У-y}{X-x}$ получимъ „n“, слѣдовательно мы получимъ „n“ прямыхъ (дѣйствительныхъ или мнимыхъ), касающихся плоской кривой въ точкѣ P.

Въ этомъ случаѣ точка P называется *кратною* точкою порядка n, и кривая будетъ имѣть видъ, обозначенный на чертежѣ (2 d).

§ 6. Второй видъ уравненія касательной.

Мы видѣли, что ур—іе касательной къ кривой $F(X,У)=0$ будетъ

$$(X-x)\frac{dF}{dx}+(У-y)\frac{dF}{dy}=0, \quad (4)$$

гдѣ въ $\frac{dF}{dx}$ и $\frac{dF}{dy}$ поставлены координаты точки касанія P.

Если кривая дана уравненіемъ

$$y=f(x),\ \text{или}\ y-f(x)=F(x,y)=0, \quad (15)$$

то, по дифференцированіи, мы получимъ:

$$\frac{dF}{dx}=-f'(x)=-\frac{dy}{dx}\ \text{и}\ \frac{dF}{dy}=1$$

Тогда ур—іе касательной будетъ такое:

$$(У-y)=\left(\frac{dy}{dx}\right)(X-x) \quad (16)$$

Эта форма ур—ія касательной чрезвычайно удобна по своей простотѣ, но она не примѣнима, когда ур—іе $F(x,y)=0$ нельзя рѣшить относительно y (или x).

§ 7. Третій видъ уравненія касательной.

Часто кривая дается въ видѣ уравненій:

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

гдѣ t—произвольный параметръ. Тогда:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = y', \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$$

Подставляя это значеніе $\frac{dy}{dx}$ въ (16), найдемъ:

$$\frac{Y-y}{y'} = \frac{X-x}{x'}, \qquad \frac{Y-y}{dy} = \frac{X-x}{dx} \ldots\ldots \quad (18)$$

Тотъ же самый результатъ можемъ получить непосредственно, опредѣляя касательную, какъ предѣльное положеніе сѣкущей, проходящей черезъ точки P и M. Уравненіе сѣкущей есть (рис. 1).

$Y - y = \text{tang}\,\varphi\,(X - x)$; но пред. $\text{tang}\,\varphi =$ пред. $\frac{Dy}{Dx} = \frac{dy}{dx} = \text{tg}\ PTX$ (Dy и Dx означаютъ разности координатъ точекъ P. и M); а слѣдовательно, уравненіе касательной будетъ

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) = \frac{y'}{x'}(X - x)$$

Косинусы угловъ касательной съ осями координатъ легко найти изъ ур—ія касательной (16), помня, что (рис. 3) $tg\ MFX = tg\varphi = \frac{dy}{dx}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{ax}\right)^2}}$$

$$\cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2\varphi}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} \quad (19)$$

Для другихъ видовъ уравненія касательной

$$(4)\ (X - x).\ F'_x + (Y - y).\ F'_y = 0 \ \text{и}\ \frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y'}{y'} \quad (17)$$

значенія $\cos\varphi$ мы получимъ, замѣняя въ (19) $\frac{dy}{dx}$ чрезъ $-\frac{F'_y}{F'_x}$ или чрезъ $\frac{y'}{x'}$, что мы можемъ сдѣлать, т. к. всѣ три уравненія (16), (4) и (18) выражають одну и ту же прямую, а потому ихъ коэффиціенты должны быть пропорціональны, т. е. $\frac{dy}{dx}: 1 = (-F'_x): F'_y = y': x'$.

Вставляя найдемъ $$\cos\varphi = \frac{\pm F'_y}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}} = \frac{\pm x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} =$$

или, полагая $\pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$.

Нормальная линія.

§ 8 Прямая, перпендикулярная къ касательной въ точкѣ касанія, называется нормальной линіей или нормалью.

Въ аналитической геометріи доказывается, что двѣ прямыя

$$A(X-x) + B(Y-y) = 0, \qquad A_1(X-x) + B_1(Y-y) = 0, \ldots (20)$$

проходящія черезъ одну и ту же точку $P(x,y)$, будутъ перпендикулярны когда

$$AA_1 + BB_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B}{A} \ldots \ldots (21)$$

Помня это условіе и обращаясь къ уравненіямъ касательной (4), (16), (18), мы получимъ три вида ур—ія нормали

$$\frac{X-x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{dF}{dy}} \quad \text{или} \quad \frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} \ldots \ldots (12)$$

$$Y-y = -\frac{dx}{dy}(X-x) \quad \text{или } dy(Y-y) + dx(X-x) = 0. \ldots (23)$$

$$\frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dx}{dt}(X-x) = 0 \quad \text{или} \quad y'(Y-y) + x'(X-x) = 0. \ (24)$$

Длина касательной, нормали и пр. (рис. 3)

§ 9 Проведемъ къ кривой, ур—іе которой въ прямоугольныхъ координатахъ $y = f(x)$, въ точкѣ $M(x,y)$ касательную—MF и нормаль MN. Части этихъ линій, заключенныя между точкою касанія и точкой пересѣченія съ осью X—овъ, соотвѣтственно называются *длиною касательной (T)* и—*нормали* (N); а проэкціи этихъ отрѣзковъ на ось X—овъ —*длиною подкасательной* (S_t —субтангента) и *поднормали* (S_n —

субнормаль). На нашемъ чертежѣ $MF=T$, $MN=N$, $FP=S_t$, $PN=S_n$; точка касанія $M(x,y)$, гдѣ $y=MP$, а по § 7:

$$\operatorname{tg} MFP=\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx},$$

$$\cos\varphi=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{dx}{dy}$$

$$\operatorname{sn}\varphi=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}.$$

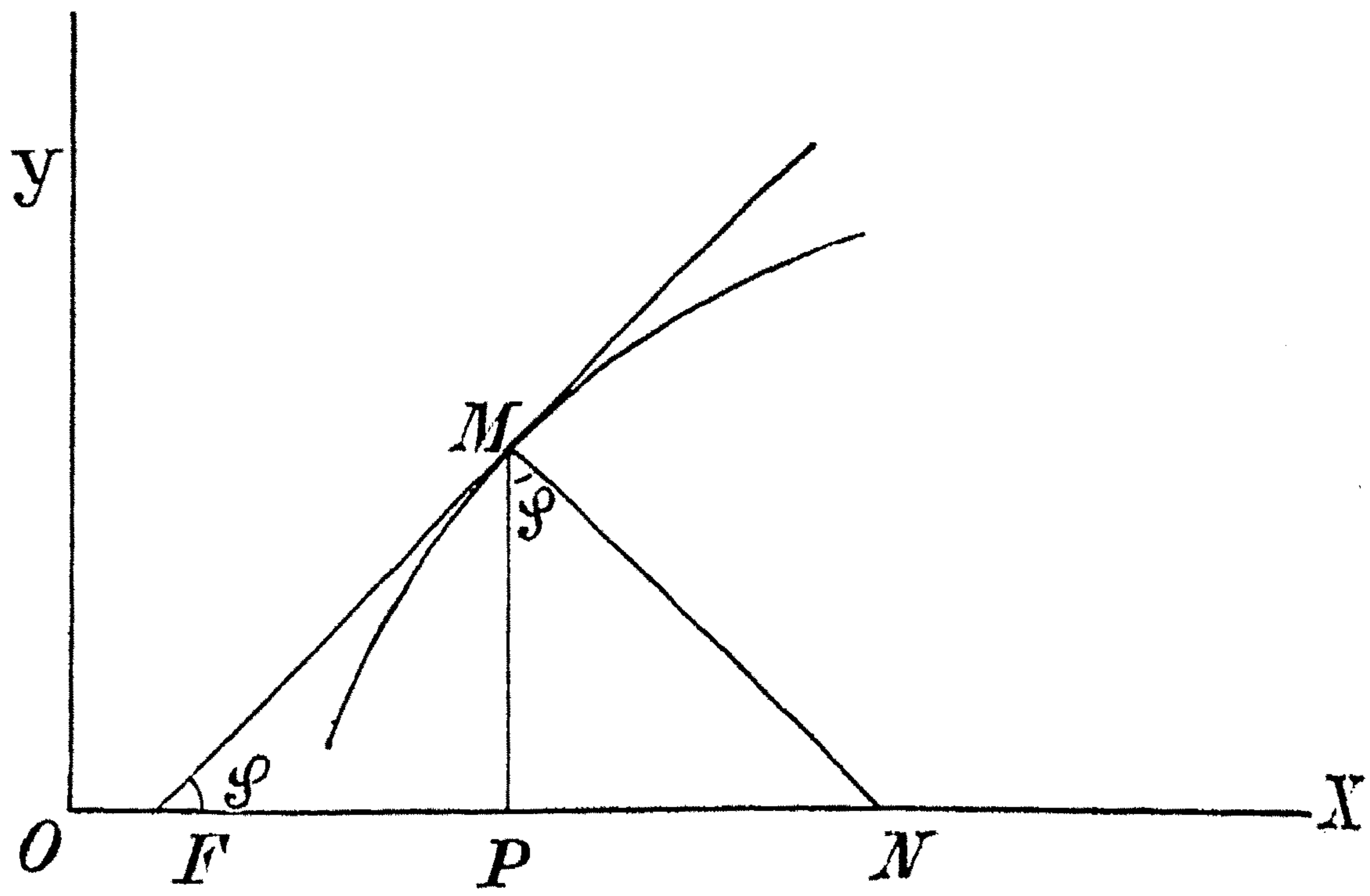

рис. 3.

Теперь уже изъ $\triangle MFP$ безъ всякаго труда найдемъ:

(I) $$S_t=FP=PM.\operatorname{ctg}\varphi=y\,\frac{dx}{dy}\qquad T=FM=PM\frac{1}{\operatorname{sn}\varphi}=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

а изъ $\triangle$ MPN имѣемъ

(II) $$PN=S_n=MP.\operatorname{tg}\varphi=y\,\frac{dy}{dx},\ MN=N=MP\frac{1}{\cos\varphi}=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Легко перейти отсюда и къ тѣмъ случаямъ, когда ур—ія касательной и нормали даны въ 1-ой и 3-ей формѣ, помня, что $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$ и $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{dF}{dx}\right):\left(\frac{dF}{dy}\right)$.

ПОЛЯРНЫЯ КООРДИНАТЫ.

§ 10. Теорема.

Тангенсъ угла μ между радіусомъ векторомъ какой нибудь точки кривой $M(r,\theta)$ и касательной къ кривой въ той же точкѣ M равенъ

$$\operatorname{tg}\mu=r\,\frac{d\theta}{dr}=\frac{r}{r'},\ \text{гдѣ}\quad r'=\frac{dr}{d\theta}.$$

Пусть M (r,θ)—точка кривой, уравненіе которой въ полярныхъ координатахъ $r=\Phi(\theta)$. Полагая (рис. 5) $OMT=\mu$ и обозначая уголъ между TM и OX черезъ φ, ($\angle xOM=\theta$), легко увидимъ, что φ, какъ внѣшній, равенъ $\theta+\mu$, откуда

$$\operatorname{tg}\mu=\operatorname{tg}(\varphi-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\varphi\ \operatorname{tg}\theta}\cdot \qquad (^*)$$

По формуламъ преобразованія полярныхъ координатъ въ прямоугольныя имѣемъ

(a) $y=r\sin\theta,\ x=r\cos\theta,$ откуда $y^2+x^2=r^2,\ \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta$ (в);

а изъ ур—ія касательной (§ 7) имѣемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}$. Подставляя найденныя значенія въ (*), получимъ

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x\,dx+y\,dy}. \quad (c)$$

Дифференцируя (а) и (в), найдемъ, обозначая $r'=\frac{dr}{d\theta}=\Phi'(\theta)$, что

$$dy=r'.\operatorname{sn}\theta.\ d\theta+r.\cos\theta.d\theta, \qquad dx=r'.\cos\theta.\ d\theta-r\operatorname{sn}\theta.d\theta$$

$$x.\,dx+ydy=\frac{1}{2}\,d\ (x^2+y^2)=r.r'.d\,\theta.$$

$$x.\,dy-y.\,dx=r.\cos\theta\,(r'\operatorname{sn}\theta+r\cos\theta)\,d\theta-r\operatorname{sn}\theta\,(r'\cos\theta-r\operatorname{sn}\theta)\,d\theta=r^2.\ d\theta,$$

Откуда $$\operatorname{tg}\mu=\frac{r^2\ .\ d\theta}{r.r'.d\theta}=\frac{r}{r'},\ \ \mu=\operatorname{arctg}\frac{r}{r'}.$$

§ 11. Касательная въ полярныхъ координатахъ (рис. 4).

Пусть $SP=r$, $PSX=\theta$ будутъ полярныя координаты точкц прикосновенія, а $SO=r_1$ и $OSX=\theta_1$ кординаты какой нибудь точки O на касательной, проведенной въ точкѣ P къ кривой $r=\Phi(\theta)$.

Полагая $SPO=\mu$, изъ $\triangle\ SPO$ имѣемъ:

$$\angle SPO+\angle SOP+\angle OSP=180^0=\angle SOP+\mu+(\theta-\theta').$$

$$\frac{r}{r_1}=\frac{sn\,SOP}{sn\,SPO}=\frac{sn\,[(\theta-\theta_1)+\mu]}{sn\,\mu}=$$

$$=\sin(\theta-\theta_1)\operatorname{ctg}\mu+\cos(\theta-\theta_1).$$

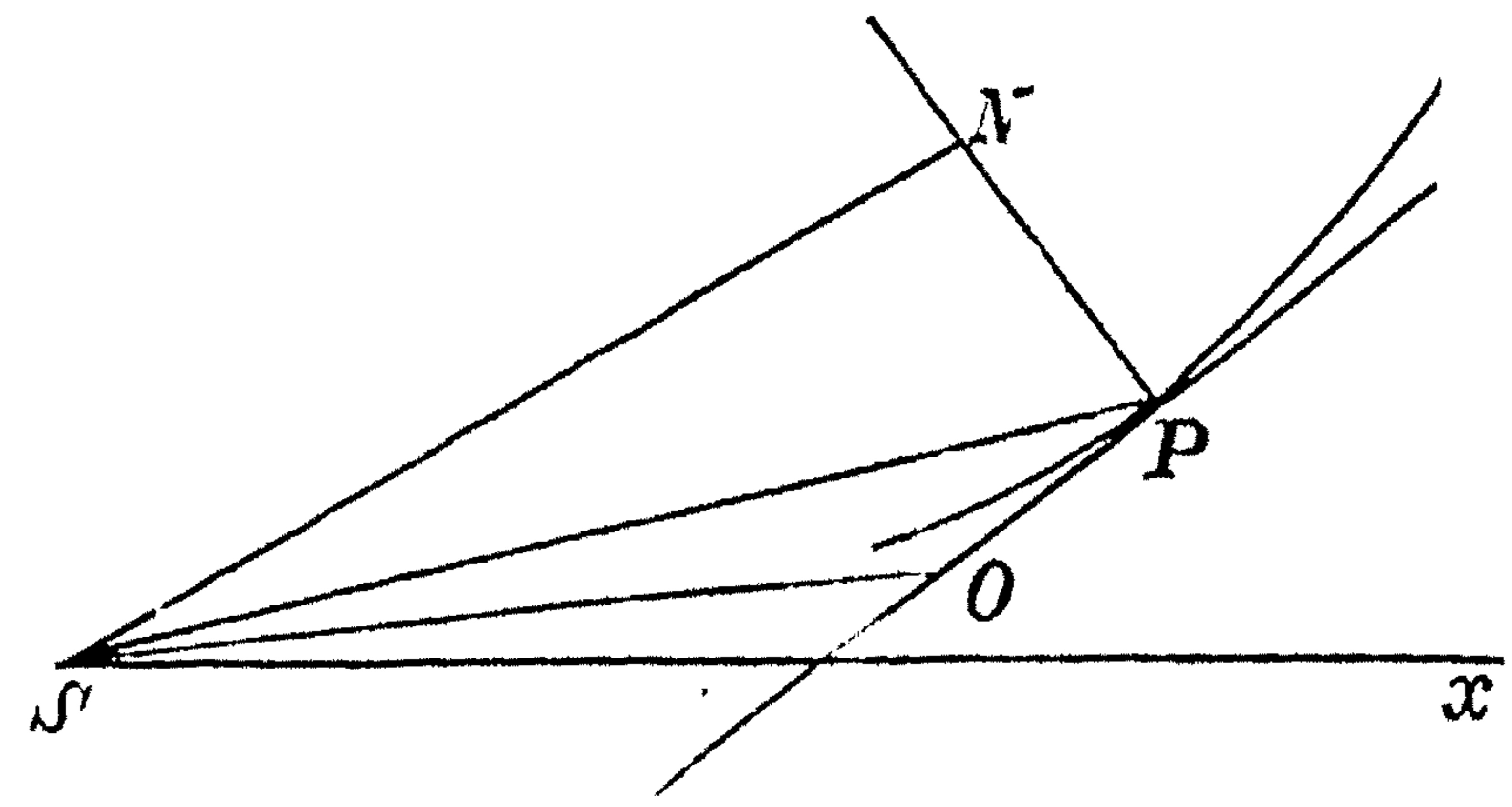

рис. 4.

Но (§ 10) $\operatorname{tg}\mu=r.\frac{d\theta}{dr}$, откуда

(1) $$\frac{r}{r_1}=\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\sin(\theta-\theta_1)+\cos(\theta-\theta_1)$$

Это уравненіе можно написать еще и такъ:

$$r_1\frac{d[r\operatorname{Sin}(\theta-\theta_1)]}{d\theta}=r^2.$$

§ **12. Уравненіе нормали** PN (рис. 4), если $SP=r$. $PSX=\theta$ $SN=r_1$, $NSX=\theta_1$, гдѣ N какая—нибудь точка нормали, найдемъ совершенно такимъ же образомъ, какъ и ур—іе касательной.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ $\triangle$ SNP имѣемъ:

$$\frac{SP}{SN}=\frac{\sin\,SNP}{\sin\,SPN}=\frac{\operatorname{Sin}\left[(\theta_1-\theta)+\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)\right]}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)},$$

откуда

(2) $$\frac{r}{r_1}=\operatorname{sn}(\theta_1-\theta)\operatorname{tg}\mu+\cos(\theta_1-\theta)=\sin(\theta_1-\theta)\frac{r.d\theta}{dr}+\cos(\theta-\theta_1).$$

или $$r_1\frac{d[r\cos(\theta_1-\theta)]}{d\theta}=r\frac{dr}{d\theta}.$$

§ 13. Длина T, S_t, N и S_n въ полярныхъ координатахъ (рис. 5)

Въ полярной системѣ координатъ подкасательной называется перпендикуляръ OT, проведенный чрезъ полюсъ O перпендикулярно къ радіусу вектору OM до пересѣченія съ касательной M въ точкѣ T. Поднормаль ON измѣряется на той же прямой отъ полюса O до пересѣченія ея съ нормалью MN въ точкѣ N. Длиною касательной называется MT часть ея, заключенная между точкой касанія M и точкой пересѣченія касательной съ подкасательной.

Точно также, длина нормали MN есть часть ея между точкой касанія и точкой пересѣченія N съ S_n.

Изъ прямоугольнаго $\triangle\ OMT$, гдѣ (§ 10)

$$\angle\ OMT = \mu,\ \operatorname{tg}\mu = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{r'},\ OM = r,$$

$$\sin\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\mu}} = \frac{\pm r}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}} = \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

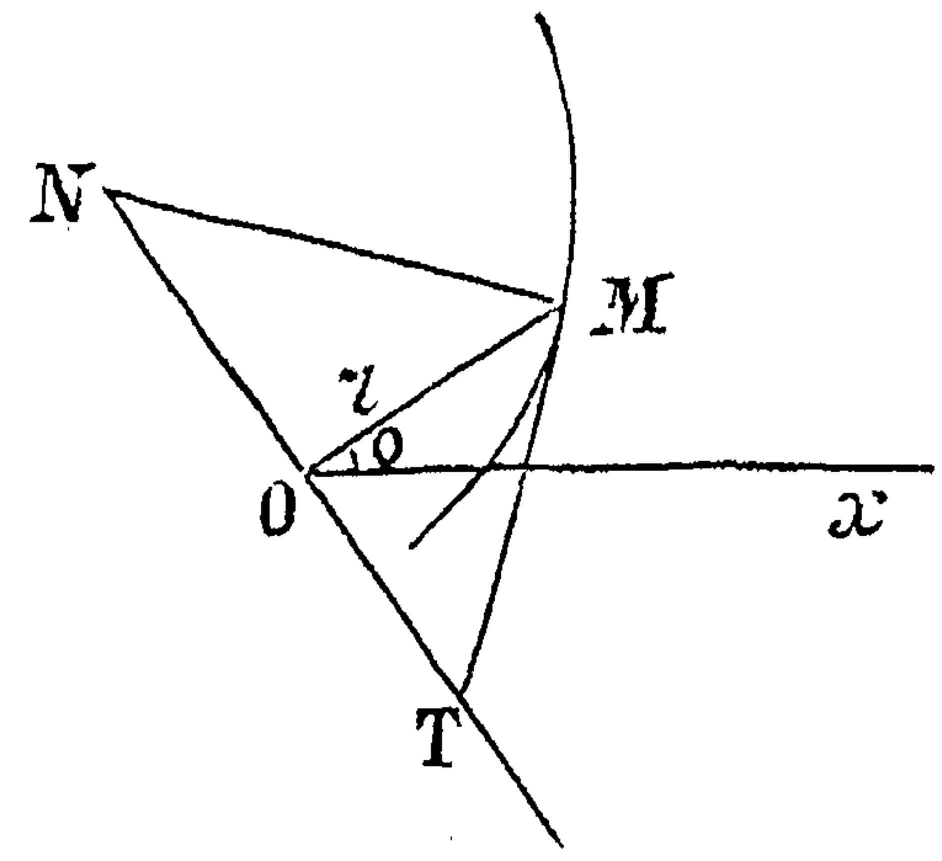

рис. 5.

найдемъ: $$OT = S_t = OM.\ \operatorname{tg}\mu = \frac{r^2}{r'},$$

$$MT = T = OM\ \frac{1}{\cos\mu} = \frac{r}{r'}\cdot\ \sqrt{r^2+r'^2};$$

а изъ $\triangle MNO$, гдѣ $\angle\ MNO = \mu$, имѣемъ:

$$NO = Sn = r.\ \operatorname{ctg}\mu = r',\ NM = N = r.\frac{1}{\sin\mu} = \sqrt{r^2+r'^2}.$$

§ 14. Выпуклость и вогнутость.

Кривая MPQ (рис. 6) называется въ точкѣ P *выпуклою* относительно какой-нибудь прямой OX, если часть ея, лежащая около P, заключается *въ тупомъ* углу, составленномъ прямой OX и касательной къ кривой въ данной точкѣ P; изъ чертежа видно, что кривая въ этомъ случаѣ обращена къ прямой OX своею выпуклостью.

Наоборотъ, если часть кривой около P лежитъ *въ остромъ* углу, то кривая въ точкѣ P называется *вогнутою*.

Наконецъ, если точка P такая, что часть кривой, идущая въ одну сторону отъ (P), лежитъ въ остромъ изъ угловъ между касательной и OX, а часть кривой, идущая въ другую сторону отъ P,—въ тупомъ, то говорятъ, что кривая *перегибается* въ этой точкѣ, а самая точка называется *точкой перегиба*, (см. рис. 13 в).

Очевидно, что въ точкѣ перегиба касательная «*пересѣкаетъ*» кривую.

§ **15**. Для того, чтобы найти *аналитическіе признаки выпуклости и вогнутости* кривой (I) $Y = \varphi(X)$ въ точкѣ $P(x,y)$, проведемъ (черт. 6) касательную $M'PQ'$ въ этой точкѣ и замѣтимъ, что если кривая обращена выпуклостію къ OX, то *ординаты* безконечно-близкихъ къ P точекъ *кривой* $Q(x+h,\ y+k)$ и $M(x-h,\ y-k)$ будутъ *обѣ больше* соотвѣтственныхъ *ординатъ касательной*.