ЛЕКЦІИ ПО ГИДРОДИНАМИКѢ.

Н. Е. Жуковскаго.

ЧИТАНО ВЪ МОСКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ ВЪ ПЕРВЫЙ СЕМЕСТРЪ 1886 ГОДА.

МОСКВА.
Въ Университетской типографіи (М. Катковъ),
на Страстномъ бульварѣ.
1886.

Изъ „Ученыхъ Записокъ, Императорскаго Московскаго Университета“.
Отдѣлъ Физико-Математическій, выпускъ седьмой.

ЛЕКЦІЯ I.

О движеніи частицы жидкости.

§ 1. **Разложеніе движенія частицы жидкости.** Возьмемъ начало прямоугольныхъ осей координатъ x, y, z въ какой-нибудь точкѣ o движущейся жидкой массы и назовемъ чрезъ u_0, v_0, w_0 компоненты относительно этихъ осей скорости точки o, а чрезъ u, v, w,—подобные компоненты другихъ точекъ жидкости. Допустимъ, что u, v, w суть непрерывныя функціи, которыя для точекъ весьма близкихъ къ o могутъ быть разложены въ строку Тайлора по x, y, z. Это условіе непрерывности компонентовъ скорости позволяетъ, не смотря на все разнообразіе движеній жидкости, указать нѣкоторые общіе законы движенія безконечно малой части ея, прилегающей къ точкѣ o, подобно тому какъ условіе непрерывности поверхности позволяетъ установить законы для радіусовъ кривизны нормальныхъ сѣченій, проведенныхъ чрезъ точку поверхности. Такую безконечно малую часть жидкости мы назовемъ *частицей жидкости*, а точку жидкости o, лежащую внутри частицы—ея центромъ. Разлагая u, v, w въ строку Тайлора по безконечно малымъ координатамъ x, y, z и отбрасывая безконечно малые члены выше перваго порядка, представимъ скорости точекъ частицы жидкости слѣдующими линейными функціями координатъ:

$$u = u_0 + \frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z,$$

$$v = v_0 + \frac{dv}{dx}x + \frac{dv}{dy}y + \frac{dv}{dz}z,$$

$$w = w_0 + \frac{dw}{dx}x + \frac{dw}{dy}y + \frac{dw}{dz}z.$$

Преобразуемъ первую изъ этихъ формулъ:

$$u=u_0+\frac{du}{dx}x+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)y+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)z+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)z-\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)y$$

и, сдѣлавъ такія же преобразованія съ двумя другими, положимъ, что

$$\frac{du}{dx}=\varepsilon_1,\ \frac{dv}{dy}=\varepsilon_2,\ \frac{dw}{dz}=\varepsilon_3, \tag{1}$$

$$\frac{dw}{dx}+\frac{dv}{dz}=2\sigma_1,\ \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=2\sigma_2,\ \frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}=2\sigma_3, \tag{2}$$

$$\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}=2\omega_1,\ \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}=2\omega_2,\ \frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}=2\omega_3; \tag{3}$$

тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} u&=u_0+\omega_2 z-\omega_3 y+\frac{dF}{dx},\\ v&=v_0+\omega_3 x-\omega_1 z+\frac{dF}{dy},\\ w&=w_0+\omega_1 y-\omega_2 x+\frac{dF}{dz}, \end{aligned} \tag{4}$$

гдѣ

$$F=\frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2+2\sigma_1 yz+2\sigma_2 zx+2\sigma_3 xy). \tag{5}$$

Фор. (4) показываютъ намъ, что *движеніе частицы жидкости можетъ быть разложено на три движенія: поступательное со скоростью ея центра, вращательное относительно оси, проходящей чрезъ этотъ центръ, и движеніе съ потенціаломъ скоростей, при которомъ центръ неподвиженъ* *).

---

*) Эта теорема дана Гельмгольцемъ. Journal von Borchardt, Bd. 55, 1858. „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, § 1.

Величины ω_1, ω_2, ω_3, опредѣляемыя фор. (3), являются кампонентами угловой скорости вращенія частицы, отложенной на оси ея вращенія такъ, что наблюдатель, глядящій изъ конца полученнаго вектора въ центръ частицы, видитъ вращеніе по солнцу. Назовемъ этотъ векторъ чрезъ ω и покажемъ, что фор. (3) даетъ для него одну и ту же величину и одно и тоже направленіе, какъ бы ни были неправельны оси координатъ. Взявши другія оси ox', oy', oz', составляемъ соотвѣтствующіе имъ компоненты скорости u', v', w', проэктируя на ox', oy', oz', порознь скорости трехъ вышеупомянутыхъ движеній. Пусть ω_1', ω_2', ω_3' будутъ проэкціи ω на новыя оси, u'_0, v'_0, w'_0—проэкціи на эти оси скорости поступательнаго движенія, а F' будетъ функція F, выраженная въ новыхъ координатахъ; тогда

$$u'=u'_0+\omega_2'z'-\omega_3'y'+\frac{dF'}{dx'},$$

$$v'=v'_0+\omega_3'x'-\omega_1'z'+\frac{dF'}{dy'},$$

$$w'=w'_0+\omega_1'y'-\omega_2'x'+\frac{dF'}{dz'}.$$

Взявши производную по y' отъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія и производную по z' отъ обѣихъ частей втораго, вычитаемъ полученныя уравненія:

$$\frac{dw'}{dy'}-\frac{dv'}{dz'}=2\omega_1'.$$

Это равенство вмѣстѣ съ двумя аналогичными доказываетъ желаемое.

Отбросивъ поступательное и вращательное движеніе частицы мы будемъ заниматься изслѣдованіемъ третьяго ея движенія, которое назовемъ *деформаціею*, такъ какъ только отъ него происходитъ измѣненіе вида частицы. Деформація можетъ быть разсматриваема, какъ движеніе частицы относительно подвижныхъ осей координатъ, которыя имѣютъ то же поступательное и вращательное движеніе, какъ и частица жидкости. Для простоты письма, мы будемъ эти подвижныя оси обозначать тѣми же буквами x, y, z, такъ что скорости деформаціи выразятся формулами:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dF}{dx},\ \frac{dy}{dt}=\frac{dF}{dy},\ \frac{dz}{dt}=\frac{dF}{dz}. \tag{6}$$

Имѣя потенціалъ скоростей, скорости деформаціи ортогональны къ семейству поверхностей $F=const$ и обратно пропорціональны разстояніямъ dn между двумя безконечно близкими поверхностями этого семейства, отличающимися на постоянное приращеніе dF.

§ 2. **Коэффиціенты линейнаго расширенія радіусовъ векторовъ частицы жидкости. Оси деформаціи.** Проведемъ чрезъ центръ частицы жидкости радіусъ векторъ r и, написавъ, что

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

возьмемъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную по времени:

$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}.$$

Подставляемъ сюда величины скоростей изъ фор. (6) и дѣлимъ на r^2:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r^2}\left(x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}\right)=\frac{2F}{r^2}.$$

Найденная величина представляетъ *коэффиціентъ линейнаго расширенія* разсматриваемаго радіуса, отнесенный къ единицѣ длины и времени. Мы будемъ обозначать его буквою ε и считать отрицательнымъ, когда радіусъ укорачивается. Мы нашли, что

$$\varepsilon=\frac{2F}{r^2}; \tag{7}$$

подставляя сюда функцію F изъ фор. (5) и обозначая чрезъ α, β и γ углы r съ осями координатъ, получимъ:

$$\varepsilon=\varepsilon_1 cs^2\alpha+\varepsilon_2 cs^2\beta+\varepsilon_3 cs^2\gamma+2\sigma_1 cs\beta cs\gamma+2\sigma_2 cs\gamma cs\alpha+2\sigma_3 cs\alpha cs\beta. \tag{8}$$

Если въ фор. (8) положимъ $\alpha = o$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то найдемъ, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1;$$

отсюда и изъ подобныхъ соображеній для осей oy и oz слѣдуетъ, что ε_1, ε_2, ε_3 суть коэффиціенты линейнаго расширенія радіусовъ, направленныхъ по осямъ координатъ. Принимая въ фор. (7), что r есть радіусъ векторъ точки поверхности $F = const$, найдемъ, что числитель второй части этой формулы будетъ постоянная величина, такъ что *коэффиціенты линейнаго расширенія для различныхъ направленій радіуса вектора частицы обратно пропорціональны квадратамъ радіусовъ векторовъ поверхности* $F = const$ *). Будемъ называть эту поверхность *поверхностью расширенія*; мы видимъ, что она есть одна изъ поверхностей равнаго потенціала скоростей. Фор. (5) показываетъ, что поверхность расширенія есть эллипсоидъ или гиперболоидъ (въ частномъ случаѣ она можетъ быть: шаръ, цилиндръ или двѣ параллельныя плоскости). Если она будетъ эллипсоидъ, то вторая часть фор. (5) будетъ имѣть постоянный знакъ при всякихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x, y, z—этотъ знакъ и надо приписать постоянному числителю въ фор. (7); если же поверхность расширенія есть гиперболоидъ, то вторая часть фор. (5) для точекъ, лежащихъ внутри асимптотическаго конуса, получаетъ одинъ знакъ, а для точекъ, лежащихъ внѣ его—другой; мы должны въ этомъ случаѣ приписывать постоянному $2F$ въ фор. (7) поочередно тотъ и другой знакъ и считать поверхностью расширенія оба сопряженные гиперболоида, изъ которыхъ одинъ (для котораго беремъ $+2F$) будетъ соотвѣтствовать расширенію, а другой—сжатію; радіусы же, направленные по асимптотическому конусу, не будутъ измѣнять длины. Изъ фор. (7) слѣдуетъ, что радіусы, соотвѣтствующіе наибольшему и наименьшему коэффиціенту линейнаго расширенія, будутъ направлены по главнымъ осямъ поверхностей расширенія, которыя мы будемъ называть *осями деформаціи*. Такъ какъ скорости точекъ частицы при ея деформаціи направлены по нормалямъ семейства поверхностей $F = const$, то оси деформаціи даютъ намъ

*) Cauchy, Exercices de Mathématiques, seconde année, p. 69. 1827.

направленіе трехъ единственныхъ радіусовъ векторовъ частицы, которые при разсматриваемомъ движеніи остаются неподвижны. На основаніи этого свойства мы можемъ опредѣлить направленіе осей деформаціи изъ уравненій:

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{x}=\frac{\frac{dF}{dy}}{y}=\frac{\frac{dF}{dz}}{z}=\frac{2F}{r^2}=\varepsilon,$$

въ которыхъ ε по ур. (7) есть коэффиціентъ линейнаго расширенія по направленію искомаго неподвижнаго радіуса вектора.

Изъ написанныхъ уравненій на основаніи фор. (5) получаемъ:

$$(\varepsilon_1-\varepsilon)x+\sigma_3 y+\sigma_2 z=0,$$

$$\sigma_3 x+(\varepsilon_2-\varepsilon)y+\sigma_1 z=0,$$

$$\sigma_2 x+\sigma_1 y+(\varepsilon_3-\varepsilon)z=0.$$

Для того, чтобы эти уравненія могли быть удовлетворены величинами x, y, z неравными нулю, коэффиціентъ линейнаго расширенія ε долженъ удовлетворять условію:

$$\varepsilon^3-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\varepsilon^2+(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_3-\sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2-\sigma_3{}^2)\varepsilon-(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+$$
$$+2\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\varepsilon_1\sigma_1{}^2-\varepsilon_2\sigma_2{}^2-\varepsilon_3\sigma_3{}^2)=0.$$

Опредѣливъ отсюда ε, мы найдемъ изъ двухъ вышенаписанныхъ уравненій отношеніе $x:y:z$, соотвѣтствующее искомому направленію. Уравненіе (9), какъ извѣстно, имѣетъ три дѣйствительныхъ корня, которые мы обозначимъ чрезъ $e_1>e_2>e_3$. Такъ какъ коэффиціентъ при ε^2 равенъ суммѣ корней съ обратнымъ знакомъ, то

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=e_1+e_2+e_3,$$

или по ур. (1)

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=e_3+e_2+e_3. \tag{10}$$

На основаніи сказаннаго выше e_1 будетъ представлять наибольшій, а e_3 наименьшій коэффиціентъ линейнаго расширенія радіусовъ векторовъ частицы. Предположивъ, что оси ox, oy, oz направлены по осямъ деформаціи, представимъ фор. (5) и (6) въ видѣ:

$$F = \frac{1}{2}(e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2), \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} = e_1 x,\ \frac{dy}{dt} = e_2 y,\ \frac{dz}{dt} = e_3 z. \tag{12}$$

Формулы (12) показываютъ, что частица жидкости, имѣющая форму безконечно малаго прямоугольнаго параллелепипеда, стороны котораго параллельны осямъ деформаціи, остается прямоугольнымъ параллелепипедомъ и по прошествіи времени dt.

§ 3. **Коэффиціентъ кубическаго расширенія.** Предположимъ, что частица жидкости имѣетъ форму безконечно малаго шарика, уравненіе котораго есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

и опредѣлимъ ея видъ по прошествіи времени dt. На основаніи ур. (12) точка жидкой частицы, имѣющая координаты x, y, z, будетъ по прошествіи времени dt имѣть координаты:

$$x_1 = x(1 + e_1 dt),\quad y_1 = y(1 + e_2 dt),\quad z_1 = z(1 + e_3 dt).$$

Опредѣливъ отсюда x, y, z и подставивъ ихъ въ уравненіе сферы, получимъ уравненіе эллипсоида:

$$\frac{x_1^2}{a^2(1+e_1 dt)^2} + \frac{y_1^2}{b^2(1+e_2 dt)^2} + \frac{z_1^2}{c^2(1+e_3 dt)^2} = 1.$$

Объемъ сферы будетъ

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

а объемъ эллипсоида

$$V' = \frac{4}{3}\pi a^3 (1+e_1 dt)(1+e_2 dt)(1+e_3 dt),$$

такъ что приращеніе объема будетъ

$$V'-V=\frac{4}{3}\pi a^2(e_1+e_2+e_3)dt.$$

Раздѣля это приращеніе на объемъ V и время dt, найдемъ коэффиціентъ кубическаго расширенія θ жидкой частицы, отнесенный къ единицѣ объема и времени:

$$\theta=e_1+e_2+e_3$$

или по (10)

$$\theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}, \tag{13}$$

гдѣ x, y, z какія-нибудь прямоугольныя оси координатъ. Если θ отрицательно, то частица жидкости сжимается.

§ 4. **Девіація радіусовъ векторовъ въ плоскости. Скошеніе прямыхъ угловъ.** Проведемъ чрезъ центръ частицы плоскость s, которую примемъ за плоскость координатъ xoy при составленіи фор. (5) На этой плоскости возьмемъ точку, безконечно близкую отъ центра, и опредѣлимъ ее мѣсто радіусомъ r и угломъ φ, который этотъ радіусъ образуетъ съ осью ox. Опредѣлимъ проэкцію скорости этой точки на направленіе элемента дуги $rd\varphi$, проведенной изъ центра o радіусомъ r. Эта проэкція будетъ

$$\frac{1}{r}\,\frac{dF}{d\varphi},$$

гдѣ въ выраженіи F, данномъ фор. (5), надо подставить: $z=o$, $x=r\,cs\varphi$, $y=r\,sn\varphi$. Мы найдемъ, что

$$\frac{1}{r}\,\frac{dF}{d\varphi}=r[(\varepsilon_2-\varepsilon_1)cs\varphi\,sn\varphi+\sigma_3(cs^2\varphi-sn^2\varphi)].$$

Раздѣляя эту скорость на r и дѣлая нѣкоторыя преобразованія, найдемъ угловую скорость σ разсматриваемаго радіуса въ плоскости s:

$$\sigma=\frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)sn2\varphi+\sigma_3 cs2\varphi. \tag{14}$$

Мы назовемъ эту угловую скорость *девіаціею* радіуса вектора въ плоскости s. Такъ какъ вторая часть фор. (14) имѣетъ для φ и $\varphi+\frac{\pi}{2}$ равныя величины, но различные знаки, то *девіаціи въ плоскости двухъ взаимно перпендикулярныхъ радіусовъ равны и противоположны.* Вообразивъ въ плоскости s два радіуса r и r', образующіе съ осью ox углы φ и $\varphi+\frac{\pi}{2}$, увидимъ на основаніи этой теоремы, что прямой уголъ между r и r' уменьшится во время dt на

$$2\sigma dt=[(\varepsilon_2-\varepsilon_1)sn2\varphi+2\sigma_3 cs2\varphi)dt].$$

Раздѣливъ это уменьшеніе прямаго угла на dt, получимъ величину которую назовемъ *коэффиціентомъ скошенія*, отнесеннымъ къ единицѣ времени:

$$2\sigma=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)sn2\varphi+2\sigma_3 cs2\varphi.$$

Если положимъ здѣсь $\varphi=o$, то найдемъ, что

$$2\sigma=2\sigma_3.$$

На основаніи этого равенства и подобныхъ равенствъ для плоскостей zox и zoy приходимъ къ заключенію, что $2\sigma_1$, $2\sigma_2$, $2\sigma_3$ суть коэффиціенты скошенія координатныхъ угловъ. Если коэффиціентъ скошенія прямаго угла отрицателенъ, то этотъ уголъ увеличивается.

Предположимъ, для большей простоты, что оси ox и oy направляются по главнымъ осямъ кривой втораго порядка, по которой плоскость s пересѣкаетъ поверхность расширенія и назовемъ эти оси *осями деформаціи плоскости* s. Фор. (14) приметъ въ этомъ предположеніи видъ:

$$\sigma=\frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)sn2\varphi. \tag{15}$$

Это равенство показываетъ, что *радіусы векторы плоскости*, направленные *по ея осямъ деформаціи, не имѣютъ девіаціи въ плоскости; всѣ же остальные радіусы движутся по направленію отъ оси деформаціи съ меньшимъ коэффиціентомъ расширенія къ оси деформаціи съ* *большимъ коэффиціентомъ расширенія*. Кромѣ того, такъ какъ вторая часть фор. (15) имѣетъ одну и ту же величину для φ и $\frac{\pi}{2}-\varphi$, то *два радіуса вектора, лежащіе на плоскости внутри прямаго угла, образованнаго осями ея деформаціи, и наклоненные къ его сторонамъ подъ равными углами, имѣютъ одинаковыя девіаціи, направленныя въ одну сторону*. Наибольшая по абсолютной величинѣ девіація получается изъ фор. (15) при $\varphi=45^0$:

$$\sigma=\frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1),$$

такъ что прямой уголъ, стороны котораго дѣлятъ пополамъ прямые вертикальные углы, неимѣющіе скошенія, имѣетъ наибольшее скошеніе.

§ 5. **Конусы девіацій. Скошеніе перпендикуляра къ плоскости.** Предположимъ, что въ фор. (12) e_1, e_2, e_3 не измѣняются со временемъ и опредѣлимъ траэкторіи точекъ частицы жидкости. Дифференціальныя уравненія этихъ траэкторій будутъ:

$$\frac{dx}{e_1 x}=\frac{dy}{e_2 y}=\frac{dz}{e_3 z}.$$

интегрируя ихъ, находимъ:

$$x^{\frac{1}{e_1}}=ay^{\frac{1}{e_2}}=bz^{\frac{1}{e_3}},$$

гдѣ a и b произвольныя постоянныя.

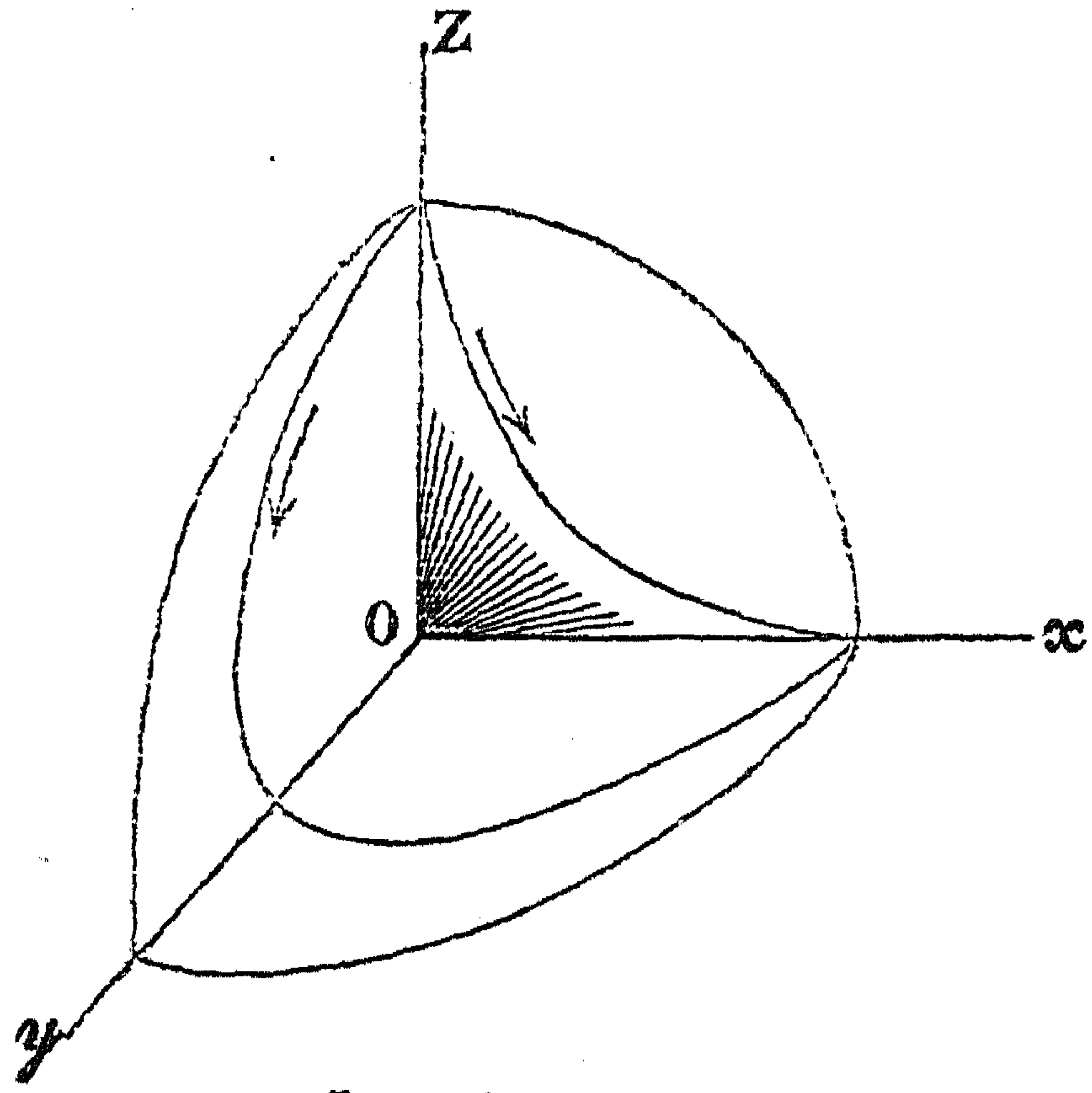
Если приравняемъ каждую изъ частей вышенаписаннаго равенства нѣкоторому перемѣнному ξ и опредѣлимъ x, y, z, то найдемъ:

$$x=\xi^{e_1},\ y=a^{-e_2}\xi^{e_2},\ z=b^{-e_3}\xi^{e_3}.$$

Возведемъ эти уравненія въ степени e_2-e_3, e_3-e_1, e_1-e_2 и перемножимъ:

$$x^{e_2-e_3}\,y^{e_3-e_1}\,z^{e_1-e_2}=const. \tag{16}$$

Такъ какъ первая часть этого уравненія нулеваго измѣренія относительно координатъ, то оно представляетъ намъ нѣкоторую коническую поверхность, по которой перемѣщаются радіусы векторы частицы при ея деформаціи. Если e_1, e_2, e_3 измѣняются со временемъ, то можно сказать, что радіусы векторы перемѣщаются по повер. (16) только въ продолженіи времени dt. Будемъ называть найденное семейство поверхностей *конусами девіацій* *). Принимая по прежнему $e_1 > e_2 > e_3$ увидимъ, что всѣ конусы девіацій проходятъ чрезъ оси ox и oz (фиг. 1), потому что, представивъ ур. (16) въ видѣ:



Фиг. 1.

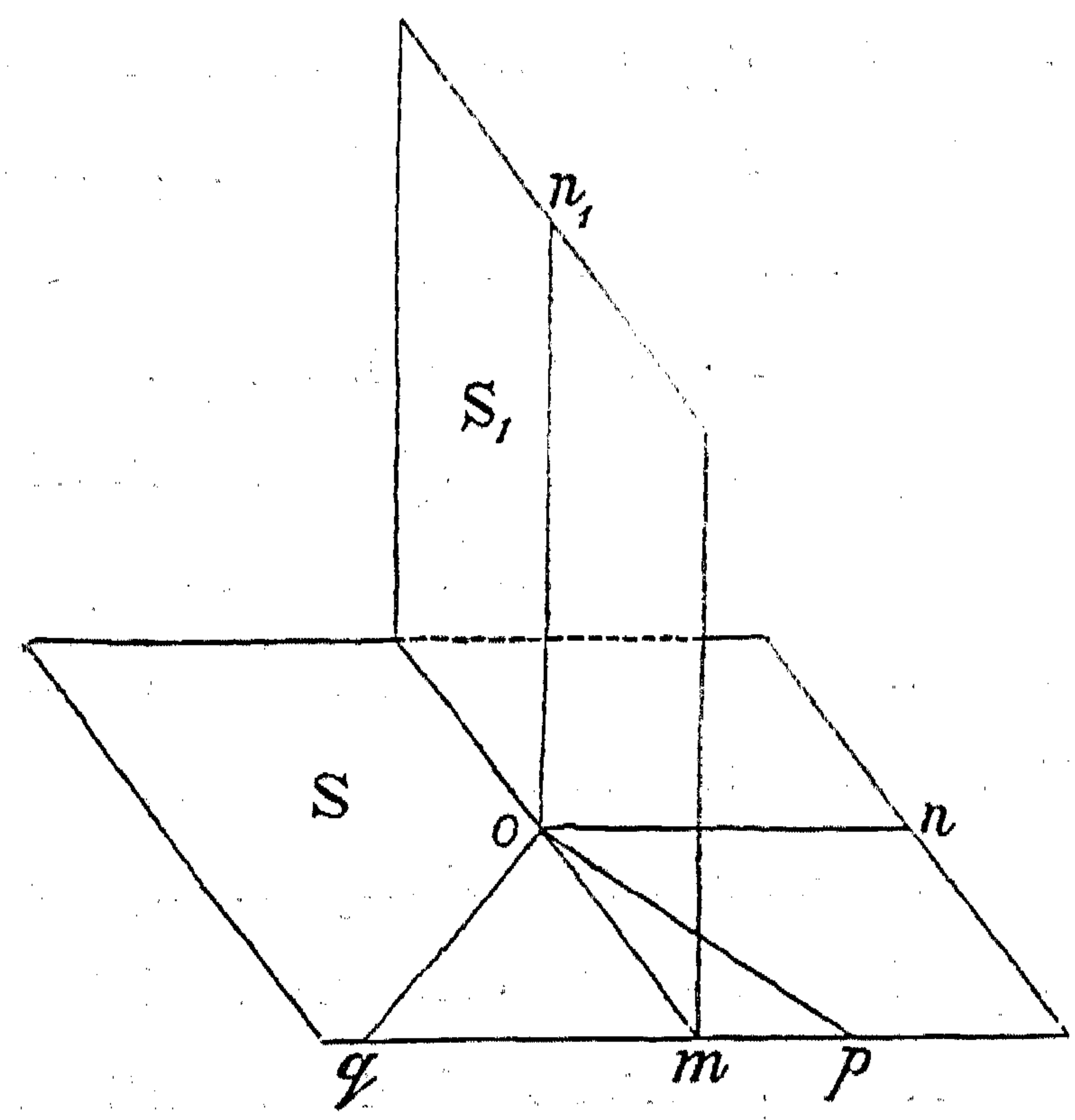
$$x^{e_2 - e_3} z^{e_1 - e_2} = const. y^{e_1 - e_3},$$

мы удовлетворимъ ему положеніемъ $z=o$, $y=o$ или $x=o$, $y=o$. Чтобы опредѣлить скорость, съ которою какой-нибудь радіусъ частицы r перемѣщается по конусу девіацій, проведемъ чрезъ этотъ радіусъ плоскость s, прикасающуюся къ упомянутому конусу. Если назовемъ чрезъ φ уголъ между r и одною изъ осей деформаціи плоскости s, то искомая нами скорость, отнесенная къ единицѣ длины радіуса, выразится фор. (15). Опредѣленную такимъ образомъ величину σ мы будемъ называть *девіаціею радіуса вектора въ пространствѣ.* Изъ фор. (15) слѣдуетъ, что радіусы векторы движутся по конусу девіацій, направляясь отъ радіуса вектора съ наименьшимъ коэффиціентомъ расширенія къ радіусу вектору съ наибольшимъ коэффиціентомъ расширенія, какъ это представлено стрѣлками на фиг. (1). Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ вся девіація радіуса r лежитъ въ плоскости s, то всѣ точки частицы жидкости, находящіяся въ плоскости s, будутъ лежать по прошествіи времени dt въ нѣкоторой плоско-

---

*) Свойства конусовъ девіацій изложены болѣе подробно въ нашемъ сочиненіи „Кинематика жидкаго тѣла“, § 8.

сти s', которая пересѣчетъ плоскость s по радіусу r. Въ этомъ смыслѣ радіусъ r называется *характеристикою плоскости* s. Предположивъ, что проэкціи радіуса r на оси координатъ суть x, y, z, найдемъ изъ ур. (16), что косинусы угловъ нормали плоскости s съ осями координатъ находятся въ отношеніи:



Фиг. 2.

$$(e_2-e_3)yz:\ (e_3-e_1)zx:\ (e_1-e_2)xy.$$

Если теперь примемъ наоборотъ радіусъ $r_1=on_1$ (фиг. 2), представляющій нормаль плоскости s, за характеристику нѣкоторой плоскости s_1 и будемъ искать нормаль on этой плоскости, то найдемъ для ея направленія отношенія косинусовъ:

$$(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)x^2yz:\ (e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_2-e_3)xy^2z:$$
$$(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)xyz^2,$$

то есть

$$x:\ y:\ z.$$

Такимъ образомъ *нормаль и характеристика плоскости суть двѣ взаимныя прямыя линіи.* Движеніе плоскости s, образованной точками частицы, приводится къ ея вращенію около характеристики on съ угловою скоростью, равной девіаціи радіуса om въ плоскости s_1. По первой теоремѣ § 4 эта девіація равна и противоположна девіаціи радіуса on_1 въ той-же плоскости; но такъ какъ девіація радіуса on_1 въ плоскости s_1 представляетъ всю его девіацію въ пространствѣ, то *перемѣщеніе нормали плоскости* s *отъ движенія этой плоскости равно и прямо противоположно перемѣщенію радіуса частицы жидкости, направленнаго по этой нормали.*

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что проэкція перемѣщеннаго радіуса вектора on_1 на перемѣщенную плоскость s (перемѣщеніе совершается во время dt) пойдетъ по направленію om, такъ что изъ всѣхъ прямыхъ угловъ, образованныхъ радіусомъ on_1 и радіусомъ, лежащимъ въ плоскости s, уголъ $n_1 om$ имѣетъ наибольшій по абсолютной величинѣ коэффиціентъ скошенія.

Назовемъ его *коэффиціентомъ скошенія перпендикуляра къ плоскости*. Этотъ коэффиціентъ равенъ двойной девіаціи радіуса on_1 въ пространствѣ; коэффиціентъ же скошенія всякаго другаго прямаго угла $n_1 op$ равенъ двойной проэкціи этой девіаціи на радіусъ op. Отсюда слѣдуетъ, что, *отложивъ на радіусахъ op и oq величины скошеній прямыхъ угловъ pon_1 и qon_1 и построивъ на плоскости s векторъ, имѣющій эти двѣ проэкціи на радіусахъ op и oq, мы найдемъ направленіе om и коэффиціентъ скошенія перпендикуляра on_1 къ плоскости s.*

§ 6. **О радіусахъ и плоскостяхъ частицы жидкости, неизмѣняющихъ своего направленія.** Прибавляя къ скоростямъ, даннымъ фор. (12), скорости вращательнаго движенія частицы, мы получимъ скорости ея точекъ относительно осей, движущихся поступательно со скоростью ея центра. Отношеніе проэкцій x: y: z радіуса r, который въ этомъ движеніи остается неподвиженъ въ продолженіи времени dt, найдемъ изъ уравненій:

$$\frac{e_1 x+\omega_2 z-\omega_3 y}{x}=\frac{e_2 y+\omega_3 x-\omega_1 z}{y}=\frac{e_3 z+\omega_1 y-\omega_2 x}{z}=\frac{2F}{r^2}=\varepsilon,$$

въ которыхъ ε есть коэффиціентъ линейнаго расширенія по направленію искомаго радіуса. Отсюда получимъ:

$$\begin{aligned}(e_1-\varepsilon)x-\omega_3 y+\omega_2 z&=o,\\ \omega_3 x+(e_2-\varepsilon)y-\omega_1 z&=o,\\ -\omega_2 x+\omega_1 y+(e_3-\varepsilon)z&=o.\end{aligned}\tag{17}$$

Для того, чтобы эти уравненія удовлетворялись величинами x, y, z неравными нулю, необходимо, чтобы коэффиціентъ линейнаго расширенія обращалъ въ нуль ихъ опредѣлитель, т.-е.

$$(\varepsilon-e_1)(\varepsilon-e_2)(\varepsilon-e_3)-\omega_1{}^2(\varepsilon-e_1)-\omega_2{}^2(\varepsilon-e_2)-\omega_3{}^2(\varepsilon-e_3)=o.\tag{18}$$

Такъ какъ это уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ