О ДВИЖЕНІИ ТВЕРДАГО ТѢЛА,

ИМѢЮЩАГО ПОЛОСТИ,

НАПОЛНЕННЫЯ ОДНОРОДНОЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ.

Н. Е. Жуковскаго.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Тип. В. Демакова, Новый пер., 7.
1885.

Печатано по распоряженію Физико-Химическаго Общества при Императорскомъ С.-Петербургскомъ Университетѣ.

О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородной капельной жидкостью.

Н. Е. Жуковскаго.

Рядомъ съ задачею о движеніи твердаго тѣла въ безпредѣльной жидкой массѣ возникла другая задача — о движеніи твердаго тѣла, заключающаго въ себѣ жидкія массы. На сколько намъ извѣстно, Стоксъ первый обратилъ вниманіе на эту интересную задачу. Въ своихъ мемуарахъ „On some cases of fluid motion" [1]) и „On the critical values of sums of periodic series" [2]), читанныхъ въ 1842 и 1847 году, онъ разсмотрѣлъ два случая полостей, изъ которыхъ одна имѣетъ форму прямоугольнаго параллелипипеда, а другая—форму цилиндра съ основаніемъ по круговому сектору, и высказалъ весьма важную мысль, что движеніе твердаго тѣла не измѣнится, если замѣнимъ въ немъ жидкую массу нѣкоторымъ *эквивалентнымъ твердымъ тѣломъ* (equivalent solid); впрочемъ, справедливость такой замѣны онъ доказываетъ только для случая малыхъ скоростей.

Въ 1860 году Гельмгольцъ въ своемъ сочиненіи „Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten" [3]) изслѣдовалъ колебательное движеніе твердаго тѣла подъ вліяніемъ тренія жидкости, наполняющей его сферическую полость, а въ 1873 году эта же задача съ большею подробностью была разобрана Любскимъ въ его сочиненіи Ueber den

---

[1]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 105.

[2]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 533.

[3]) Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. XL, S. 607.

Einfluss, welchen auf die Bewegung eines Pendels mit einem kugelförmigen Hohlraume eine in ihm enthaltene reibende Flüssigkeit ausübt" [1]). Въ своемъ прекрасномъ курсѣ по гидродинамикѣ, вышедшемъ въ 1873 году, Ламбъ, при изложеніи задачи о движеніи твердаго тѣла въ безпредѣльной жидкости, касается также и задачи о движеніи тѣла, заключающаго въ себѣ жидкія массы, и разбираетъ, какъ примѣръ, случай эллипсоидальной полости [2]).

Наконецъ, въ 1883 году, появляется сочиненіе Неймана „Hydrodynamische Untersuchungen" [3]), въ которомъ задача о движеніи тѣлъ въ жидкости получаетъ самую общую постановку, а вмѣстѣ съ нею и задача о движеніи тѣла, заключающаго въ себѣ жидкія массы, которую онъ, въ отличіе отъ первой задачи, называетъ „innere Probleme". Нейманъ разсматриваетъ односвязныя и многосвязныя полости и показываетъ, что въ послѣднемъ случаѣ начальное движеніе, сообщенное жидкой массѣ при покоющемся твердомъ тѣлѣ, оказываетъ на движеніе тѣла жироскопическій эффектъ.

Вотъ всѣ извѣстныя намъ сочиненія о движеніи твердаго тѣла, заключающаго внутри себя жидкія массы. Одни изъ нихъ относятся къ частнымъ примѣрамъ, другія же останавливаются на интересующей насъ задачѣ только мимоходомъ, при изслѣдованіи болѣе важной задачи о движеніи тѣлъ въ безпредѣльной жидкой массѣ. Такимъ образомъ не существуетъ сочиненія, изъ котораго бы читатель получилъ полное представленіе о движеніи твердаго тѣла, заключающаго внутри себя жидкія массы; а между тѣмъ, эта задача значительно проще задачи о движеніи тѣла въ безпредѣльной жидкой массѣ и можетъ быть изложена съ большею полнотою нежели послѣдняя. Вслѣдствіе этого мы считаемъ не безполезнымъ наше сочиненіе, въ которомъ, вмѣстѣ съ нѣкоторыми новыми общими теоремами, читатель найдетъ описаніе движеній, соотвѣтствующихъ многимъ формамъ полостей, до сихъ поръ не изслѣдованныхъ. Это сочиненіе состоитъ изъ трехъ главъ.

Въ первой главѣ излагается общая теорія движенія тѣла и заключенныхъ въ немъ жидкихъ массъ, пренебрегая треніемъ и предполагая, что скорости жидкостей имѣютъ потенціальныя функціи. При этомъ оказывается, что внутреннее движеніе жидкости вполнѣ опредѣляется по вращенію тѣла и не зависитъ отъ его поступательнаго движенія; само же движеніе тѣла совершается

---

[1]) Borchardts Journal, Bd. 77, S. 1.

[2]) Lamb, A. Treatise on the Motion of Fluids, p. 112.

[3]) Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig, 1883.

такъ, какъ будто бы жидкія массы были замѣнены эквивалентными твердыми тѣлами. Массы эквивалентныхъ тѣлъ равны массамъ жидкостей; ихъ центры тяжестей совпадаютъ съ центрами тяжестей жидкихъ массъ; что же касается до ихъ моментовъ инерціи, то мы доказываемъ, что моментъ инерціи эквивалентнаго тѣла относительно всякой оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести, менѣе момента инерціи соотвѣтственной жидкой массы относительно той же оси. Если тѣло имѣетъ многосвязныя полости и находящимся въ нихъ жидкимъ массамъ сообщено начальное движеніе, то, замѣняя эти массы эквивалентными тѣлами, мы должны еще присоединить къ тѣлу нѣкоторый жироскопъ, направленіе оси вращенія и моментъ начальнаго количества движенія котораго вполнѣ опредѣляются по главному моменту количествъ движенія жидкихъ массъ при покоющемся тѣлѣ. Здѣсь въ нашемъ изложеніи дѣлается невозможнымъ то сомнѣніе, которое, по словамъ Неймана, возникало при его методѣ изслѣдованія [1]). Оканчивая первую главу, мы излагаемъ въ сокращенной формѣ также и методъ Неймана, хотя наше изслѣдованіе ведется независимо отъ него.

Вторая глава заключаетъ въ себѣ опредѣленіе внутренняго движенія жидкости и эллипсоидовъ инерціи эквивалентныхъ тѣлъ для различныхъ формъ полостей. Мы начинаемъ ее подробнымъ изслѣдованіемъ случая эллиптической полости и разъясняемъ внутреннее движеніе, совершающееся въ ней съ помощію особаго вида движенія, которое мы называемъ *эллиптическимъ вращеніемъ.* Послѣ этого мы разбираемъ задачу о цилиндрическихъ полостяхъ Для изслѣдованія движенія жидкости, являющагося въ нихъ отъ вращенія около оси, параллельной образующей цилиндра, мы пользуемся, слѣдуя указанію Томсона и Тета [2]), тѣмъ методомъ, который употребляетъ С. Венанъ въ задачѣ о крученіи призмъ [3]); переходя потомъ къ вращенію тѣла около оси, перпендикулярной образующей цилиндра, мы излагаемъ задачу Стокса о полости, имѣющей форму прямоугольнаго параллелипипеда, и рѣшаемъ съ помощію Бесселевыхъ функцій новую задачу о полости, имѣющей форму прямаго круглаго цилиндра. Далѣе, мы обращаемся къ полостямъ, имѣющимъ форму тѣлъ вращенія и показываемъ, что эта задача можетъ быть изслѣдована съ помощію сферическихъ функцій совершенно также, какъ задача С. Венана съ помощію тригонометри-

[1]) Hydrodynamische Untersuchungen, S. 236.

[2]) Natural Philosophy, § 705.

[3]) Mémoire sur la torsion der prismes, Savants Etrangers. T. XIV.

ческихъ функцій. Такимъ образомъ получается обратный способъ рѣшенія задачи, который можетъ дать сколько угодно различныхъ формъ полостей, для которыхъ извѣстно внутреннее движеніе жидкости и эллипсоидъ инерціи эквивалентнаго тѣла. Съ помощію такого способа мы находимъ коническую полость, полость, образованную вращеніемъ пересѣкающихся гиперболъ, и кольцевидную полость. Какъ примѣръ прямаго рѣшенія задачи о тѣлахъ вращенія, мы изслѣдуемъ съ помощію сферическихъ функцій случай полости, имѣющей форму полушара. Вторая глава оканчивается примѣрами многосвязныхъ полостей и разъясненіемъ жироскопическаго эффекта, происходящаго отъ начальнаго движенія жидкихъ массъ.

Третья глава посвящена движенію жидкости съ треніемъ. Указавъ общій способъ, служащій для опредѣленія движенія тѣла и находящейся въ немъ жидкости, мы излагаемъ задачу Гельмгольца и прибавляемъ къ ней новую задачу о движеніи замкнутой трубки, наполненной жидкостью. Эта послѣдняя задача изслѣдуется нами съ помощію теоріи трубокъ Пуазеля, и рѣшеніе ея провѣряется на одномъ выполненномъ нами приборѣ.

ГЛАВА I.

Вспомогательныя теоремы.

§ 1. Мы изложимъ сначала нѣкоторыя гидродинамическія теоремы, которыя послужатъ основаніемъ нашего изслѣдованія. Будемъ, вмѣстѣ съ Томсономъ, называть *циркуляціею скорости* (circulation) по какому-нибудь контуру, лежащему внутри жидкости, взятый по этому контуру интегралъ

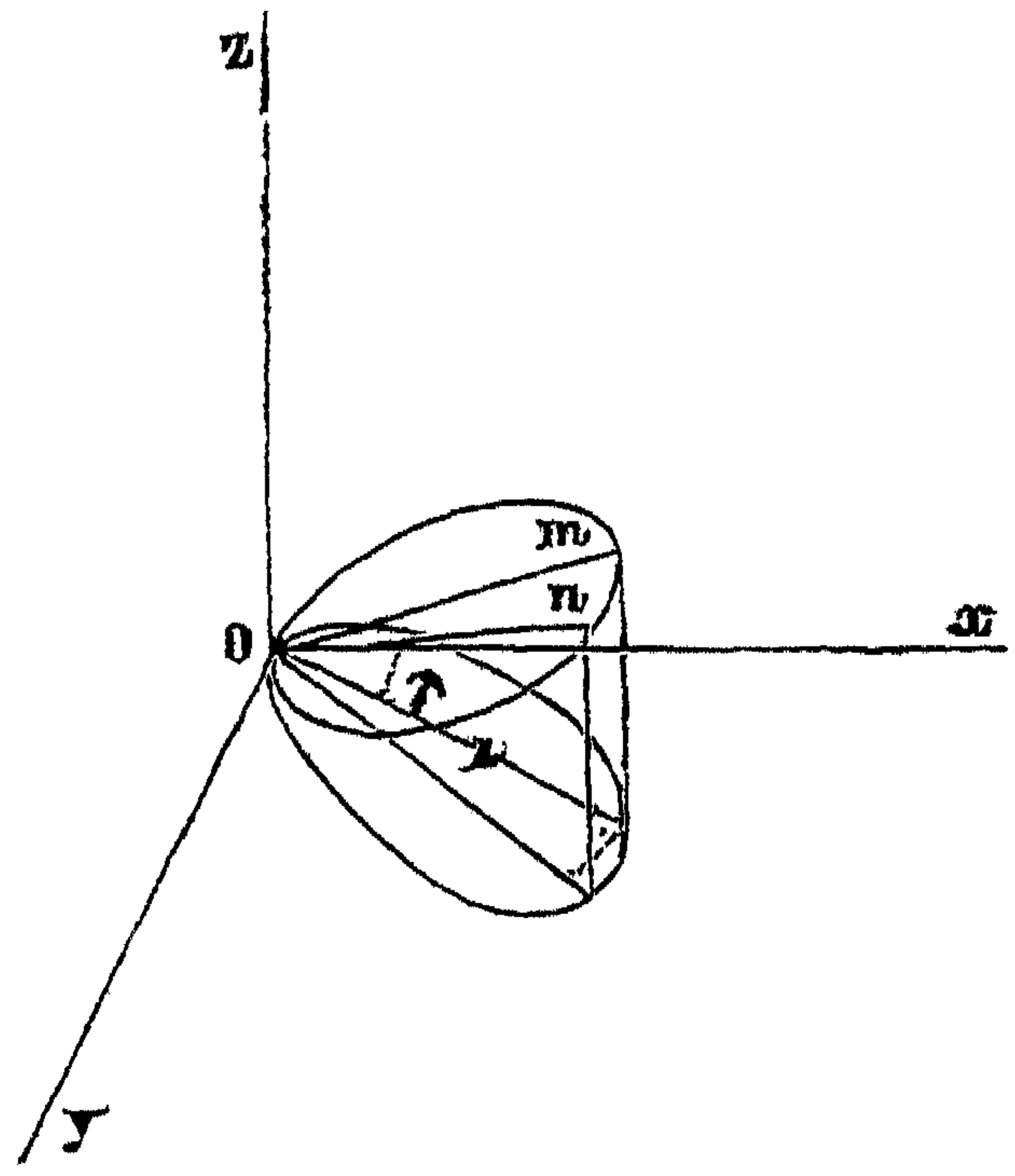
$$\int v \cos\theta ds \quad ,$$

гдѣ v скорость жидкости, ds элементъ контура, θ уголъ между v и ds. Опредѣлимъ сперва чему равна циркуляція по безконечно малому замкнутому контуру. Пусть (фиг. 1) omno будетъ такой контуръ.

Беремъ начало прямоугольныхъ осей координатъ x,y,z въ точкѣ o и направляемъ ось oz по оси вращенія частицы жидкости. Скорости точекъ жидкости, безконечно близкихъ къ o, могутъ быть разложены каждая на двѣ скорости, изъ которыхъ одна имѣетъ потенціальную функцію скоростей $\varphi(x,y,z)$, а другая является скоростію вращательнаго движенія около оси oz съ угловою скоростью вращенія ω частицы жидкости. Сдѣлавъ такое разложеніе скоростей, найдемъ, что для замкнутаго контура omno

$$\int v\cos\theta ds = \int \frac{d\varphi}{ds} ds + \int r\omega\cos\psi ds,$$

гдѣ r проэкція радіуса вектора точки на плоскость xy, а ψ уголъ между ds и направленіемъ скорости отъ вращательнаго движенія.



Фиг. 1.

Первый интегралъ, взятый по замкнутому контуру, пропадаетъ и у насъ остается только второй интегралъ, въ которомъ можно положить

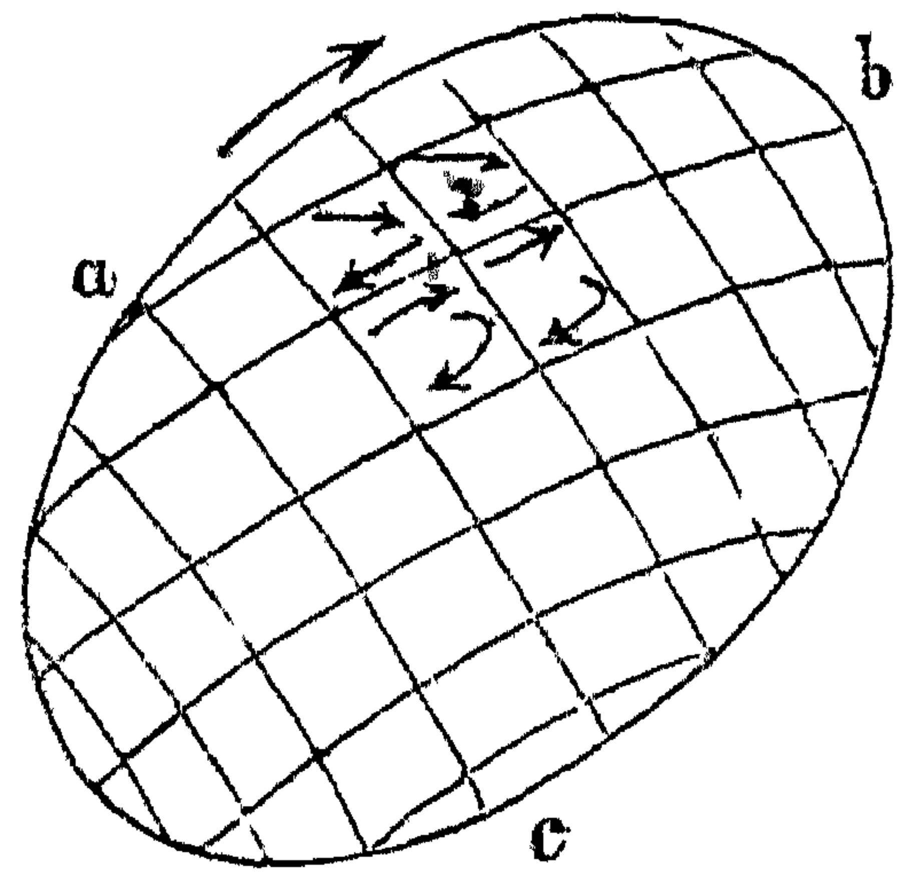
$$\cos\psi\, ds = rd\lambda,$$

гдѣ λ уголъ между r и ox. Мы получаемъ

$$\int v\cos\theta ds = \omega \int r^2 d\lambda = 2\omega d\sigma,$$

гдѣ $d\sigma$ есть безконечно малая площадь проэкціи контура omno на плоскость xy. Такъ какъ эта площадь есть ничто иное, какъ площадь перпендикулярнаго сѣченія вихревой нити, полученной съ помощію проведенія чрезъ всѣ точки контура omno линій вихря, то можно сказать, что *циркуляція скорости по безконечно малому замкнутому контуру равна напряженію вихревой нити, построенной на этомъ контурѣ.*

Переходимъ къ опредѣленію скорости по конечному контуру, *обращаемому въ точку.* Мы будемъ называть такимъ образомъ контуръ, который можетъ быть обращенъ въ точку посредствомъ непрерывнаго измѣненія, не выходя изъ жидкой массы. Чрезъ такой контуръ всегда можно провести поверхность, которая вся будетъ лежать въ жидкости. Вообразимъ (фиг. 2), что такая поверхность проведена чрезъ данный намъ контуръ abca, и построимъ на ней два ряда линій, которыя раздѣлятъ контуръ на безконечно малыя части. Нетрудно видѣть, что циркуляція скорости по контуру abca можетъ быть замѣнена суммою циркуляцій по всѣмъ безконечно малымъ контурамъ, взятымъ въ томъ же направленіи, потому что при такомъ суммованіи циркуляціи по всѣмъ внутреннимъ линіямъ сократятся. Такъ какъ циркуляція по всякому безконечно малому замкнутому контуру равна напряженію вихревой нити, построенной на этомъ контурѣ, то сумма всѣхъ такихъ циркуляцій будетъ равна суммѣ напряженій всѣхъ вихревыхъ нитей, проходящихъ сквозь контуръ abca. Отсюда получается теорема



Фиг. 2.

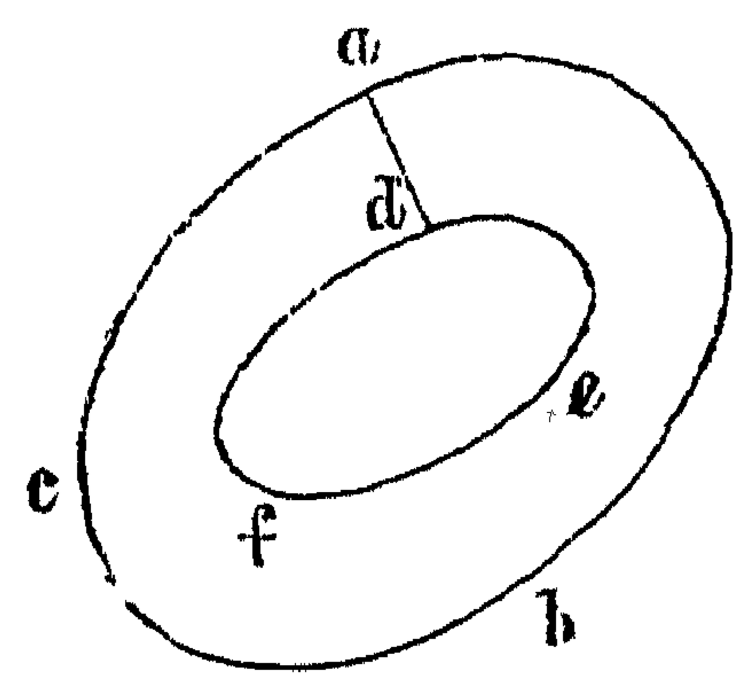
Стокса [1]): *Циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, обращаемому въ точку, равна суммѣ напряженій всѣхъ вихревыхъ нитей, проходящихъ чрезъ этотъ контуръ.* Напряженіе вихря надо считать положительнымъ, если вращеніе частицы совершается въ ту сторону, въ которую беремъ циркуляцію, и—отрицательнымъ въ обратномъ случаѣ.

§ 2. Прилагаемъ теорему Стокса къ изслѣдованію движенія жидкой массы безъ вращенія частицъ жидкости. Если пространство, занимаемое жидкою массою, односвязно, то всѣ замкнутые контуры, проводимые внутри его, обращаемы въ точку, и потому циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру при отсутствіи вращенія частицъ равна нулю. Для жидкой массы, занимающей многосвязное пространство, подобное заключеніе необходимо только для замкнутыхъ контуровъ, обращаемыхъ въ точку, но въ ней могутъ быть проводимы также и замкнутые контуры, въ точку необращаемые, для которыхъ циркуляція скорости не

---

[1]) Stokes, Cambridge University Calendar, 1854.

должна быть равна нулю. Докажемъ, что для всякихъ двухъ такихъ контуровъ, которые могутъ быть посредствомъ непрерывнаго измѣненія, не выходя изъ жидкой массы, преобразованы изъ одного въ другой, циркуляціи скорости одинаковы. Пусть (фиг. 3) abca



Фиг. 3.

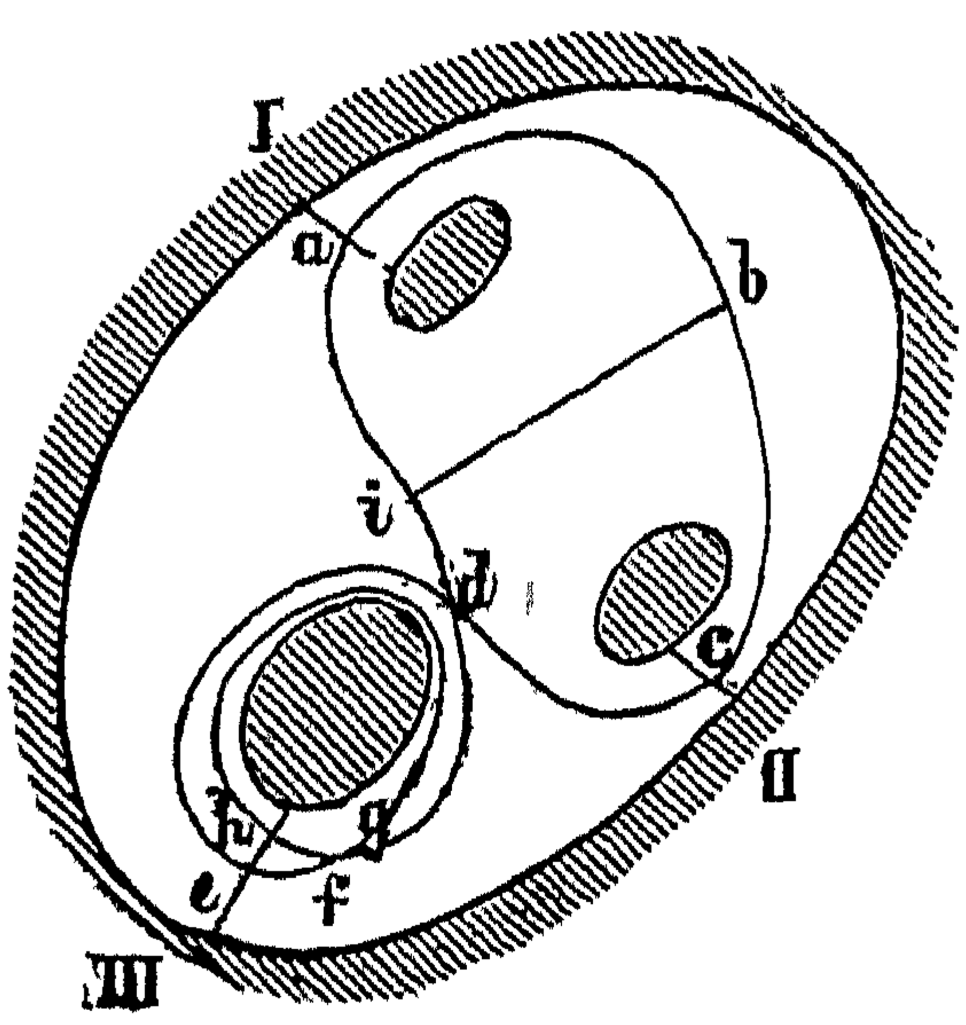
и defd будутъ два такіе контура. Мы всегда можемъ провести между ними линію ad такъ, что контуръ abcadfeda будетъ обращаемъ въ точку. Вслѣдствіе этого, условившись обозначать циркуляцію скобкою, въ которую вписанъ контуръ, получаемъ

$$o = (abcadfeda) = (abca) + (ad) + (dfed) + (da)$$

или

$$(abca) = (defd).$$

Проведя n перегородокъ, обращающихъ n—связное пространство, занимаемое жидкою массою, въ односвязное, построимъ для каждой перегородки замкнутый контуръ, который пересѣкаетъ ее одинъ разъ и не пересѣкаетъ другихъ перегородокъ. Такіе контуры,



Фиг. 4.

числомъ *n*, будемъ называть *главными контурами*; они не обращаемы въ точки и не преобразуемы изъ одного въ другой. Циркуляціи по главнымъ контурамъ мы будемъ называть *главными циркуляціями*. Докажемъ, что циркуляція по всякому замкнутому контуру можетъ быть выражена алгебраическою суммою главныхъ циркуляцій. Возьмемъ, напримѣръ, трехъ-связную полость (фиг. 4) и напишемъ, что

$$(abcdefghfdia) = (abia) + (ibcdi) + (defd) + (fghf);$$

называя чрезъ k, k_1, k_2 главныя циркуляціи, взятыя по часовой стрѣлкѣ для перегородокъ I, II и III, преобразуемъ эту формулу въ такой видъ:

$$(abcdefghfdia) = k + k_1 - 2k_2.$$

Обозначая вообще чрезъ k, k_1,.... k_{n-1}, главныя циркуляціи, соотвѣтствующія n перегородкамъ, можемъ выразить циркуляцію по какому-нибудь замкнутому контуру abca формулою:

$$(abca) = mk + m_1k_1 + ... + m_{n-1}k_{n-1},$$

въ которой m, m_1, ... m_{n-1} суть нѣкоторыя положительныя или отрицательныя цѣлыя числа. Для полученія числа m, напримѣръ, надо сосчитать сколько разъ разсматриваемый контуръ пересѣкаетъ первую перегородку, идя въ направленіи одинаковомъ съ первымъ главнымъ контуромъ (т. е. въ томъ направленіи, въ какомъ бралась циркуляція k), и сколько разъ онъ пересѣкаетъ ее, идя въ обратномъ направленіи, и взять разность этихъ чиселъ.

Найденная формула показываетъ, что циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру въ многосвязномъ пространствѣ равна нулю, если

$$k = k_1 = ... = k_{n-1} = 0.$$

На основаніи сказаннаго о циркуляціи скорости можно доказать теорему Гельмгольца, что *скорости несжимаемой жидкости, движущейся безъ вращенія частицъ, вполнѣ опредѣляются по ихъ нормальнымъ составляющимъ на границахъ жидкой массы и по главнымъ циркуляціямъ.* Если бы мы допустили, что существуютъ два теченія несжимаемой жидкости, удовлетворяющія даннымъ условіямъ, то вычитая геометрически изъ скоростей перваго теченія скорости втораго, нашли бы теченіе несжимаемой жидкости безъ вращенія частицъ, нормальныя составляющія скоростей котораго на границахъ жидкости были бы равны нулю. Въ такомъ теченіи, вслѣдствіе несжимаемости жидкости, всѣ линіи токовъ должны быть замкнутыя кривыя, по которымъ жидкость должна течь въ одномъ направленіи. Если бы скорости этого теченія не были равны нулю, то взявши циркуляціи по линіямъ токовъ въ сторону движенія жидкости, мы бы получили нѣкоторыя положительныя величины, а между тѣмъ, вслѣдствіе $k = k_1 = ... k_{n-1} = 0$, циркуляціи по всѣмъ замкнутымъ контурамъ должны быть равны нулю. Слѣдовательно, геометрическія разности скоростей двухъ допущенныхъ теченій должны быть нули, т. е. эти теченія должны быть одинаковы. Если жидкая масса заполняетъ полость, стѣнки которой неподвижны, то она можетъ имѣть движеніе безъ вращенія частичекъ только въ томъ случаѣ, когда пространство полости многосвязно и когда циркуляціи по нѣкоторымъ изъ главныхъ контуровъ не равны нулю; при этомъ линіи токовъ будутъ непремѣнно замкнутыми контурами, необращающимися въ точки.

Составимъ потенціальную функцію скоростей при теченіи жидкости безъ вращенія частицъ. Для этого обратимъ $n^{\underline{x}}$-связаное пространство, занимаемое жидкостью въ односвязное, посредствомъ проведенія n перегородокъ и, взявши внутри полученнаго такимъ образомъ односвязнаго пространства постоянную точку a, будемъ составлять циркуляціи скорости для различныхъ разомкнутыхъ контуровъ ab:

$$(ab) = \int vcs\theta ds.$$

Эти циркуляціи будутъ зависѣть только отъ координатъ точки b, потому что для двухъ путей acb и ac′b имѣемъ

$$o = (acbc'a) = (acb) + (bc'a)$$

или

$$(acb) = (ac'b).$$

Такимъ образомъ заключаемъ, что

$$(ac) = \varphi (x, y, z),$$

гдѣ x, y, z суть координаты точки b.

Написавъ это въ видѣ

$$\varphi (x, y, z) = \int vcs\theta ds,$$

найдемъ

$$\frac{d\varphi}{ds} = vcs\theta;$$

откуда слѣдуетъ, что φ (x, y, z) есть потенціальная функція скоростей разсматриваемаго теченія. Если возьмемъ двѣ безконечно близкія точки b и b′, лежащія съ двухъ сторонъ первой перегородки такъ, что направленье bb′ одинаково съ направленіемъ перваго главнаго контура, то

$$(abb'a) = k,$$

а слѣдовательно

$$(ab) - (ab') = k.$$

Эта формула показываетъ, что при переходѣ чрезъ перегородку въ направленіи главнаго контура потенціальная функція скоростей убываетъ скачкомъ на величину циркуляціи скорости по этому контуру. Если пространство, занимаемое жидкою массою, односвязно или если оно многосвязно, но всѣ главныя циркуляціи равны нулю, то скорости жидкости имѣютъ *однозначную* потенціальную функцію; въ противномъ же случаѣ скорости имѣютъ *многозначную* потенціальную функцію, модули періодичности которой суть главныя циркуляціи.

§ 3 Подобно циркуляціи скорости по данному контуру, лежащему внутри жидкой массы, можно взять по этому контуру интегралъ, который мы назовемъ *циркуляціею полнаго ускоренія* Онъ представляется такъ:

$$\int j\cos\mu ds,$$

гдѣ j полное ускореніе точекъ жидкости, ds элементъ контура, а μ уголъ между j и ds. Разсматривая координаты x, y, z точекъ жидкости, какъ функціи времени и начальныхъ координатъ a, b, c, предположимъ, что нашъ контуръ въ началѣ времени представлялся уравненіями

$$b = f(a)\ ,\ c = f_1(a);$$

потомъ исключимъ съ помощію этихъ уравненій b и c изъ функцій, выражающихъ x, y, z, такъ что получимъ:

$$x = F(t,a),\ y = F_1(t,a),\ z = F_2(t,a).$$

Приписывая дифференціалу, взятому по t, знакъ ∂, а дифференціалу, взятому по a, знакъ d, напишемъ

$$j\cos\mu ds = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\, dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\, dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dy + \frac{\partial z}{\partial t} dz\right) - \left[\frac{\partial x}{\partial t}\, d\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{\partial y}{\partial t}\, d\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial z}{\partial t}\, d\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]$$

или, сохраняя для v и θ значенія § 1,

$$j\cos\mu ds = \frac{\partial}{\partial t}\ (v\cos\theta ds) - d\,\frac{v^2}{2}.$$

Если разсматриваемый контуръ замкнутый, то послѣдній членъ при интеграціи пропадаетъ, и мы получаемъ формулу

$$\int j\cos\mu ds = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int v\cos\theta ds\right], \qquad (1)$$

которая даетъ намъ теорему Томсона [1]): *Циркуляція полнаго ускоренія по замкнутому контуру равна полной производной по времени отъ циркуляціи скорости поэтому контуру.* Эта теорема одинаково вѣрна, обращаемъ ли данный контуръ въ точку или нѣтъ.

§ 4. Предположимъ, что однородная несжимаемая жидкость движется съ потенціаломъ скоростей $\varphi(x,y,z)$ и опредѣлимъ для даннаго момента времени сумму элементарныхъ работъ ея количествъ движенія (мы разсматриваемъ количества движенія частицъ жидкости, какъ силы) при какомъ-нибудь безконечно маломъ возможномъ для нея перемѣщеніи. Называя возможныя перемѣщенія частицъ жидкости чрезъ $\delta x, \delta y, \delta z$ и ихъ массы чрезъ m, выразимъ искомую элементарную работу суммою

$$\sum m\left(\frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\,\delta z\right),$$

распространяемою на всю жидкую массу. Чтобы удобнѣе опредѣлить эту сумму, вообразимъ систему линій (s), элементы которыхъ направлены по перемѣщеніямъ δs точекъ жидкости, и раздѣлимъ съ помощію поверхностей, проходящихъ чрезъ эти линіи, всю жидкую массу на безконечно тонкія трубки. Пусть df будетъ площадь сѣченія такой трубки; тогда, вслѣдствіе несжимаемости, вдоль всей трубки произведеніе $\delta s df$ будетъ постоянно. Разсматривая часть нашей суммы, относящуюся къ одной изъ трубокъ, положимъ $m = \rho df\, ds$, гдѣ ρ плотность жидкости, а ds элементъ линіи s. Эта часть суммы будетъ:

$$\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\,\delta z\right)\rho df\, ds = \rho df\delta s \int \frac{d\varphi}{ds}\, ds,$$

гдѣ интеграція производится по линіи s, которую беремъ въ направленіи перемѣщенія жидкости.

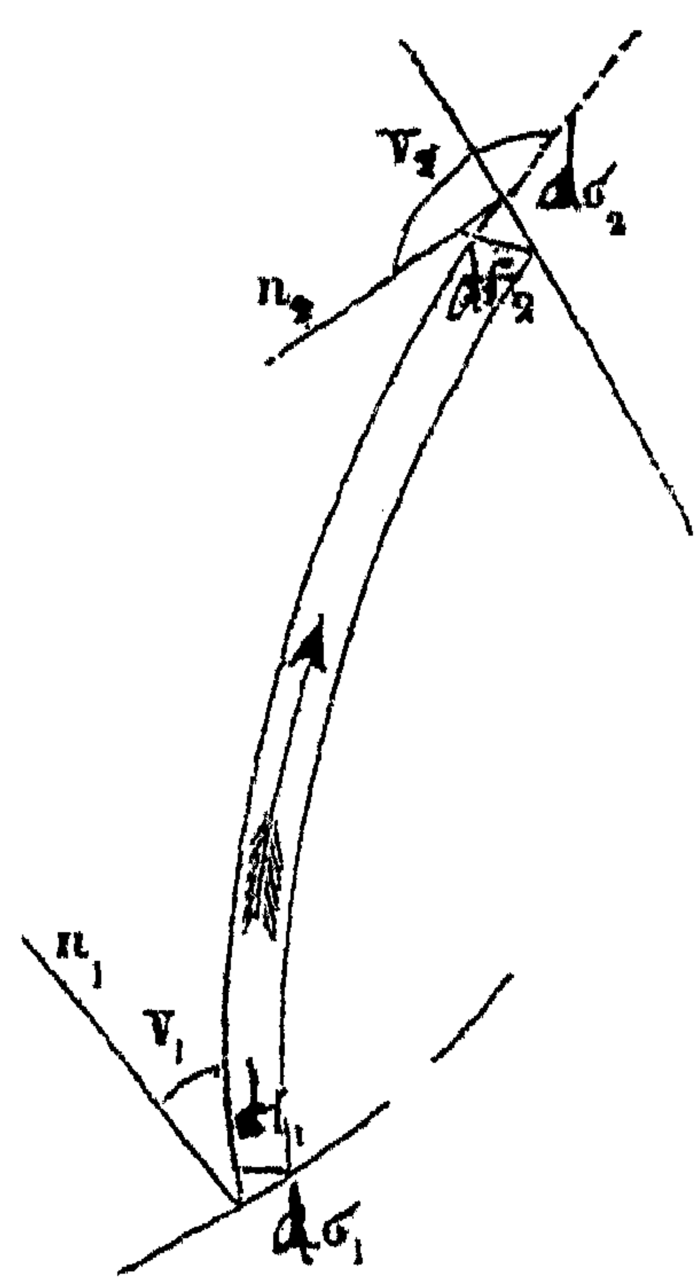
Предположивъ, что пространство, занимаемое жидкою массою, сдѣлано съ помощью проведенія n перегородокъ односвязнымъ, можемъ разсматривать функцію φ въ этомъ односвязномъ пространствѣ, какъ однозначную, а перегородки отнести къ границамъ жидкости. Если разсматриваемая нами безконечно тонкая трубка не пересѣкаетъ установленныхъ такимъ образомъ границъ и замыкается въ разсматриваемомъ пространствѣ, то интегралъ въ вышенаписанной формулѣ будетъ равенъ нулю; если же трубка пе-

[1]) On vortex motion, Philos. Trans. R. S. Edin. 1869. p. 274.

ресѣкаетъ границы, то мы будемъ отдѣльно разсматривать каждую ея часть между двумя точками пересѣченія и считать каждую за особую трубку. Обозначая величины, относящіяся къ началу трубки, индексомъ (1), а величины, относящіяся къ ея концу, индексомъ (2) и обращая вниманіе на фиг. 5, найдемъ:

$$\rho df\delta s\int\frac{d\varphi}{ds}ds=\rho(\varphi_2\delta s_2 df_2-\varphi_1\delta s_1 df_1)=-\rho(\varphi_2\delta s_2 cs\nu_2 d\sigma_2+\varphi_1\delta s_1 cs\nu_1 d\sigma_1),$$

гдѣ $d\sigma$ представляетъ площадь, вырѣзываемую трубкою на поверхностяхъ границъ, а ν уголъ между перемѣщеніемъ δs и нормалью



Фиг. 5.

къ поверхности границы, взятою внутрь жидкой массы [1]). Разсуждая подобнымъ образомъ, относительно всѣхъ безконечно тонкихъ трубокъ, найдемъ, что

$$\sum m\left(\frac{d\varphi}{dx}\delta x+\frac{d\varphi}{dy}\delta y+\frac{d\varphi}{dz}\delta z\right)=-\rho\int\int\varphi\delta s\ cs\nu\ d\sigma, \quad (2)$$

гдѣ интегралъ во второй части распространяется на поверхность жидкой массы и обѣ стороны поверхностей всѣхъ перегородокъ. Если функція φ однозначна, то всѣ интегралы, распространенные на перегородки, обращаются въ нули, ибо съ двухъ противоположныхъ сторонъ каждой перегородки $\delta s cs\nu$ имѣетъ равныя величины, но противоположные знаки; такъ что въ этомъ случаѣ можно пользоваться фор. (2), относя ея вторую часть только къ поверхности жидкости. Для многозначной функціи φ, по той же причинѣ,

[1]) Во всемъ нашемъ сочиненіи мы будемъ брать направленіе нормали внутрь жидкой массы.

интегралы могутъ быть взяты только по одной сторонѣ перегородокъ, а фор. (1), на основаніи § 2, можетъ быть написана такъ:

$$\sum m\left(\frac{d\varphi}{dx}\,\delta x+\frac{d\varphi}{dy}\,\delta y+\frac{d\varphi}{dz}\,\delta z\right)=-\rho\int\!\!\int\varphi\delta s cs\nu d\sigma+$$
$$+\rho\int\!\!\int k\delta s' cs\nu' d\sigma', \qquad (3)$$

гдѣ первый интегралъ распространяется на поверхность жидкости, а второй, на тѣ стороны перегородокъ, нормаль которыхъ направлена въ сторону главнаго контура.

Движеніе жидкости, наполняющей полость движущагося твердаго тѣла.

§ 5. Положимъ, что въ начальный моментъ твердое тѣло неподвижно, и посмотримъ, какое движеніе безъ вращенія частицъ можетъ имѣть жидкость, заключенная въ его полости? Изъ сказаннаго въ § 2 слѣдуетъ, что въ случаѣ односвязной полости жидкость должна быть неподвижна; въ случаѣ же многосвязной полости она можетъ двигаться съ потенціальною функціею скоростей, вполнѣ опредѣляемою по главнымъ циркуляціямъ k, $k_1 \ldots\ldots k_{n-1}$. Эта функція χ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\chi=k\vartheta+k_1\vartheta_1\ldots\ldots+k_{n-1}\vartheta_{n-1}, \qquad (4)$$

гдѣ ϑ_1 $\vartheta_1,\ldots$ ϑ_{n-1} суть функціи точки, удовлетворяющія уравненію Лапласа и дающія на стѣнкахъ полости производныя по нормали, равныя нулю. При этомъ функція ϑ, убываетъ на единицу при переходѣ чрезъ первую перегородку, въ направленіи перваго главнаго контура, и измѣняется непрерывно при переходѣ чрезъ всѣ остальныя перегородки; функція ϑ_1 убываетъ на единицу при переходѣ чрезъ вторую перегородку, въ направленіи втораго главнаго контура, и измѣняется непрерывно при переходѣ чрезъ всѣ другія перегородки и т. д.

Такое движеніе жидкости съ потенціаломъ скоростей χ могло бы, по мнѣнію Стокса [1]), быть получено, матерьялизируя на время перегородки, обращающія пространство полости въ односвязное, и сообщая имъ также движенія и деформаціи, чтобы скорости двухъ безконечно близкихъ точекъ жидкости, лежащихъ съ двухъ противоположныхъ сторонъ перегородки, имѣли равныя величины и направленія.

[1]) On some cases of fluid Motion. § 2.