ОБЪ ИЗЧЕЗАНІИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ СТРОКЪ.

Пр. Лобачевскаго.

КАЗАНЬ.

Въ Университетской типографіи

1834 г.

Печатано съ одобренія Издательнаго Комитета, учрежденнаго при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

1834.

I. НАУКИ.

1. Объ изчезанiи тригонометрическихъ строкъ.

(*Н. Лобачевскаго.*)

Безконечныя строки, расположенныя въ синусахъ или косинусахъ кратной дуги, названы *тригонометрическими*. Ихъ примѣненiе весьма важно въ интегрированiи линейныхъ уравненiй съ частными дифференцiалами, а слѣдовательно въ рѣшенiи самыхъ любопытныхъ задачь изъ Физики и Механики. Между тѣмъ всякая безконечная строка можетъ назваться только аналитическимъ выраженiемъ и оставаться безъ употребленiя, покуда ей не принадлежитъ извѣстное значенiе, къ которому она приближается, изчезая въ послѣднихъ членахъ. Вотъ почему тригонометрическiя строки были предметомъ подобныхъ изслѣдованiй, какъ можно читать въ запискахъ Гг. Коши (Mémoires de l' Acad. d. sciences. an 1823), Дирихле и Дирксенъ (Journal f. d. reine u. angew. Mathem.

1829. S. 157, sur la convergence des séries trigonométriques. Par M. Lejeune — Dirichlet; S. 170, Ueber d. Convergenz nach den Sinussen u. Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschr. Reihe. Von. H. Dirksen). О сочиненіи Г. Коши далъ уже свое мнѣніе Г. Диришле, которой и самъ, кажется, безъ должной осторожности допускаетъ изчезаніе строки

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin.\varphi}{\varphi}\, d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin.\varphi}{\varphi}\, d\varphi + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin.\varphi}{\varphi}\, d\varphi + \cdots$$

потому только, что знакъ мѣняется въ членахъ, которыхъ сумма должна представлять

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin.\varphi}{\varphi}\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$$

значеніе опредѣленнаго интеграла, давно принятое Математиками и можетъ быть также безъ дальней строгости. Если мнѣ и показалось, что въ названныхъ сочиненіяхъ находятся какіе нибудь недостатки, то я хочу однакожъ ограничиться однимъ только замѣчаніемъ, менѣе даже важнымъ, нежели другіе, а именно тѣмъ, что здѣсь первымъ основаніемъ служитъ предположеніе, будто строка

$$\sin.\omega + \tfrac{1}{2}\sin.2\omega + \tfrac{1}{3}\sin.3\omega + \cdots \qquad (1)$$

изчезаетъ для всякаго ω, на что однакожъ хотѣлось мнѣ сыскать напередъ совершенно удовлетворительное доказательство. Чтобы судить объ изчезаніи тригонометрической строки, стоитъ только взглянуть на уравненіе

$$\int_0^1 \cos.(i\pi x - i\omega)f(x)dx = \frac{\sin. i\omega}{i\pi}\left\{(-1)^i f(1) - f(0)\right\}$$
$$+ \frac{\cos. i\omega}{i^2\pi^2}\left\{(-1)^i f'(1) - f'(0)\right\}$$
$$- \frac{1}{i^2\pi^2}\int_0^1 \cos.(i\pi x - i\omega)f''(x)dx \quad (2)$$

которое легко вывести помощію интегрированія по частямъ и гдѣ i цѣлое положительное, x и ω произвольныя числа, π содержаніе окружности къ поперечнику,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

Здѣсь можно видѣть съ перваго раза, въ чемъ должно заключаться доказательство на изчезаніе строки

$$\Sigma \int_0^1 \cos. i\pi(x-\omega)\, d\omega f(\omega) \qquad \begin{cases} i = 0 \\ i = \infty \end{cases} \quad (3)$$

для всякой функціи $f(\omega)$, какъ скоро изчезаніе строки (1) уже допущено.

Итакъ я начну сперва говорить о суммѣ

$$\Sigma \tfrac{1}{i} \sin. i\omega \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = \infty \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть она прерывается на $i = 2^n$. Соединяя по два члена съ ряду, получимъ

$$\sum_1^{2^n} \tfrac{1}{i}\sin. i\omega = \sum_1^{2^{n-1}} \frac{\sin.(2i-1)\omega}{2i(2i-1)} + \cos.\tfrac{1}{2}\omega \sum_1^{2^{n-1}} \tfrac{1}{i}\sin.(2i-\tfrac{1}{2})\omega$$

Подобнымъ образомъ

$$\sum_{1}^{2^{n-1}} \tfrac{1}{i} \sin.(2i-\tfrac{1}{2})\omega = \sum_{1}^{2^{n-2}} \frac{\sin.(4i-\frac{5}{2})\omega}{2i(2i-1)} + \cos.\omega \sum_{1}^{2^{n-2}} \tfrac{1}{i} \sin.(4i-\tfrac{3}{2})\omega$$

$$\sum_{1}^{2^{n-2}} \tfrac{1}{i} \sin.(4i-\tfrac{3}{2})\omega = \sum_{1}^{2^{n-3}} \frac{\sin.(8i-\frac{11}{2})\omega}{2i(2i-1)} + \cos.2\omega \sum_{1}^{2^{n-3}} \tfrac{1}{i} \sin.(8i-\tfrac{7}{2})\omega$$

$$\sum_{1}^{2^{n-3}} \tfrac{1}{i} \sin.(8i-\tfrac{7}{2})\omega = \sum_{1}^{2^{n-4}} \frac{\sin.(16i-\frac{23}{2})\omega}{2i(2i-1)} + \cos.4\omega \sum_{1}^{2^{n-4}} \tfrac{1}{i} \sin.(16i-\tfrac{15}{2})\omega$$

Вообще для всякаго цѣлаго положительнаго числа r

$$\sum_{1}^{2^{n-r}} \tfrac{1}{i} \sin.\left(2^r i - \frac{2^r-1}{2}\right)\omega = \sum_{1}^{2^{n-r-1}} \frac{\sin.\left(2^{r+1} i - \frac{3.\,2^r-1}{2}\right)\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+ \cos.(2^{r-1}\omega) \sum_{1}^{2^{n-r-1}} \tfrac{1}{i} \sin\left(2^{r+1} i - \frac{2^{r+1}-1}{2}\right)\omega$$

Изъ всѣхъ уравненій выводимъ

$$\sum_{1}^{2^n} \tfrac{1}{i} \sin.i\omega = \sum_{1}^{2^{n-1}} \frac{\sin.(2i-1)\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+\cos.\tfrac{1}{2}\omega \sum_{1}^{2^{n-2}} \frac{\sin.(4i-\frac{5}{2})\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+\cos.\tfrac{1}{2}\omega \cos.\omega \sum_{1}^{2^{n-3}} \frac{\sin.(8i-\frac{11}{2})\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+\cos\tfrac{1}{2}\omega \cos.\omega \cos.2\omega \sum_{1}^{2^{n-4}} \frac{\sin.(16i-\frac{23}{2})\omega}{2i(2i-1)}$$

$+$ и проч.

$$+\cos.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\omega\ldots\cos.(2^{r-2}\omega)\sum_{1}^{2^{n-r}}\frac{\sin.(2^r i-\frac{3.\,2^{r-1}-1}{2})\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+\cos.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\omega\ldots\cos.(2^{r-2}\omega)\sum_{1}^{2^{n-r}}\tfrac{1}{i}\sin.(2^r i-\frac{2^r-1}{2})\omega$$

А если дѣлаемъ $r=n$, то

$$\sum_{1}^{2^n}\tfrac{1}{i}\sin.i\omega=\sum_{1}^{2^{n-1}}\frac{\sin.(2i-1)\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+\sum_{r=2}^{r=n}\cos.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\omega\ldots\cos.(2^{r-2}\omega)\sum_{1}^{2^{n-r}}\frac{\sin.(2^r i-\frac{3.2^{r-1}-1}{2})\omega}{2i(2i-1)}$$

$$+\cos.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\omega\cos.2\omega\ldots\cos.(2^{n-2}\omega)\sin.\frac{2^n+1}{2}\omega \qquad (5)$$

Послѣдній членъ, какая бы дуга $\omega<\pi$ ни была, съ возрастаніемъ n или долженъ дѣлаться нулемъ, или по крайней мѣрѣ нечувствительнымъ. Онъ дѣлается нулемъ и одинъ разъ навсегда уничтожается, когда въ

$$\omega=\pi\Sigma 2^{-p}$$

число членовъ ограничено. Еслижъ оно безконечно, и слѣдовательно между цѣлыми отрицательными показателями $-p$ будетъ недоставать также безконечно много цѣлыхъ чиселъ, то съ каждымъ пропущенымъ членомъ $\pi 2^{-q}$ будетъ по величинѣ

$$\cos.\,(2^{q-2}\,\omega) < \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

а произведенiе

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\omega\,\cos.\,\omega\,\cos.\,2\,\omega\,\ldots$$

по крайней мѣрѣ уменьшаться въ содержанiи къ $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ и наконецъ дѣлаться нечувствительнымъ.

Теперь во второй части уравненiя (5) принимаемъ всѣ остальные члены за положительные и увеличиваемъ, поставивши единицы вмѣсто синусовъ. Послѣ этаго можно всегда взять n довольно большое число, чтобы по величинѣ

$$\sum_{1}^{2^n} \tfrac{1}{i}\sin.i\omega < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2i(2i-1)} \left\{1+\sum_{r=2}^{r=n} \cos.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\omega\ldots\cos\,(2^{r-2}\omega)\right\}$$

Разсматриваемъ напередъ производитель

$$L = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2\,i\,(2\,i-1)}$$

Доказать изчезанiе этой строки можемъ по способу, которой изложенъ въ моей Алгебрѣ (Алгебра или Вычисленiе конечныхъ 1834 г. стр. 337) и которой примѣняется ко всѣмъ подобнымъ случаямъ. Полагаемъ, что для какого нибудь i дробь

$$\frac{1}{2\,i\,(2\,i-1)}$$

будучи разложена по степенямъ $\frac{1}{i}$, даетъ самую низшую степень 2^{-r} и которая слѣдовательно встрѣчается не далѣе, какъ до члена

$$\frac{1}{4i(4i-1)}$$

потому что для всякаго $i > 1$

$$4i(4i-1) - 4i(2i-1) > o$$

И такъ

$$L < \sum_{r=1}^{r=\infty} i\,2^{1-r}$$

Между тѣмъ неравенство

$$\frac{1}{2i(2i-1)} > 2^{-r}$$

даетъ

$$i > 2^{\frac{r-1}{2}}$$

Послѣ чего

$$L < \sum_{1}^{\infty} 2^{-\frac{r-1}{2}}$$

или

$$L < 2 + \sqrt{2}$$

Если бы въ такомъ суммованіи, остановившись на извѣстномъ членѣ, захотѣли судить о величинѣ остатка въ строкѣ, то не трудно видѣть, что вообще

$$\sum_i^\infty \frac{1}{2i(2i-1)} < \sum_r^\infty 2^{-\frac{r-1}{2}}$$

начиная съ r, которое удовлетворяетъ условію

$$2i(2i-1) > 2^r$$

и откуда находимъ

$$2^{-\frac{r-1}{2}} < \sqrt{\frac{1}{i(2i-1)}}$$

слѣдовательно

$$\sum_i^\infty \frac{1}{2i(2i-1)} < \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2i(2i-1)}}$$

значеніе, которое изчезаетъ съ возрастаніемъ i. Напримѣръ взявши $i=3$, получимъ

$$L < 1,02$$

Чтобы пояснить болѣе примѣненіе нашего способа, беремъ еще другую безконечную строку, которая въ послѣдствіи будетъ нужна

$$M = \Sigma \frac{1}{i^2}$$

и которая необходимо изчезаетъ вмѣстѣ съ L, потому что $M < 4L$. Полагаемъ

$$i^2 = 2^r$$

или непосредственно

$$i^2 < 2^r$$

съ цѣлымъ показателемъ r. Послѣ чего

$$\sum_i^{\infty} \frac{1}{i^2} < \sum_r^{\infty} i\, 2^{1-r}$$

$$< \sum_r^{\infty} 2^{1-\frac{1}{2}r}$$

$$< (2+\sqrt{2})\, 2^{1-\frac{1}{2}r}$$

$$< \frac{4+2\sqrt{2}}{i}$$

Для $i = 4$ находимъ

$$\sum_{i=4}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} < 1,08$$

$$M < 2,45$$

Другой способъ предложимъ еще слѣдующій. Пусть для какого нибудь i

$$2i(2i-1) = \alpha^2$$

Для всякаго другаго $i' > i$,

$$\frac{1}{2\,i'\,(2\,i'-1)} = \Sigma\,\frac{A}{\alpha^{2n}}$$

гдѣ $A < \alpha^2$ и гдѣ знакъ суммы относится къ цѣлымъ положительнымъ числамъ n. Пусть далѣе N то цѣлое, которое даетъ

$$2\,N\,(2\,N-1) = \alpha^{2n}$$

или непосредственно

$$2\,N\,(2\,N-1) < \alpha^{2n}$$

Отсюда

$$N \overline{\overline{<}} \frac{1+\sqrt{(1+8\,\alpha^{2n})}}{4}$$

Послѣ чего

$$\sum_i^\infty \frac{1}{2\,i\,(2\,i-1)} < \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2-1}{\alpha^4}\left(\frac{1+\sqrt{(1+8\,\alpha^4)}}{4} - i\right)$$

$$+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha^6}\left(\frac{1+\sqrt{(1+8\,\alpha^6)}}{4} - i\right)$$

$$+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha^8}\left(\frac{1+\sqrt{(1+8\,\alpha^8)}}{4} - i\right)$$

$+$ и т. д.

Отбрасываемъ вездѣ единицу подъ квадратнымъ корнемъ:

$$\sum_i^\infty \frac{1}{2\,i\,(2\,i-1)} < \frac{5-4\,i}{4\,\alpha^2} + \frac{\alpha+1}{\alpha\sqrt{2}}$$