ПРАВИЛО ЭЙЛЕРА

ВЪ ПРИМѢНЕНІИ

КЪ ОДНОМУ КЛАССУ ВОПРОСОВЪ

объ относительныхъ maxima и minima.

В. Циммермана.

ОДЕССА.
«Экономическая» типографія, Почтовая, 43.
1899.

Печатано по распоряженію Правленія Императорскаго Новороссійскаго Университета. Ректоръ *Ѳ. Н. Шведовъ*.

При рѣшеніи относящихся къ варіаціонному исчисленію такъ называемыхъ изопериметрическихъ проблемъ, или вопросовъ объ относительныхъ maxima и minima, примѣняется обыкновенно правило, данное Эйлеромъ въ его знаменитомъ сочиненіи «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes».

Правило Эйлера сводитъ рѣшеніе вопросовъ объ относительныхъ maxima и minima къ пріемамъ, относящимся къ абсолютнымъ maxima и minima, и можетъ быть выражено, въ общихъ терминахъ, слѣдующимъ образомъ: чтобы найти кривую, обладающую нѣкоторымъ свойствомъ maximum'а или minimum'а среди кривыхъ, для которыхъ одно или нѣсколько *свойствъ* даны, какъ постоянныя, — надо выраженіе того свойства, которое должно быть maximum или minimum, и выраженія свойствъ, являющихся постоянными, сложить, умноживши предварительно эти выраженія на неопредѣленные (постоянные) коэффиціенты, и затѣмъ искать — между всевозможными кривыми — кривую, на которой полученное такимъ образомъ сложное выраженіе будетъ maximum или minimum.

Въ упомянутомъ трактатѣ Эйлера содержится два доказательства вышеизложеннаго правила.

Означая чрезъ A то свойство, которое должно оставаться постояннымъ для всѣхъ (разсматриваемыхъ) кривыхъ, чрезъ B—выраженіе, которое должно получать на отыскиваемой кривой значеніе maximum или minimum, Эйлеръ (въ VI главѣ своего трактата[1]) доказываетъ теорему: кривая, которая между всевозможными

---

[1]) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. 1744. P. 227—228.

кривыми даетъ выраженію $\alpha A + \beta B$ значеніе maximum или minimum, представляетъ собою вмѣстѣ съ тѣмъ такую кривую, на которой—среди всѣхъ кривыхъ, обладающихъ однимъ и тѣмъ же свойствомъ A — выраженіе B получаетъ значеніе maximum или minimum. Вслѣдъ за доказательствомъ этой теоремы Эйлеръ дѣлаетъ заключеніе, что, обратно, когда требуется розыскать кривую, которая между всѣми кривыми, обладающими общимъ свойствомъ A, даетъ выраженію B значеніе maximum или minimum, то требованіе удовлетворяется, если абсолютно между всѣми кривыми опредѣляется та, на которой $\alpha A + \beta B$ достигаетъ maximum'а или minimum'а [Coroll. I] [1]).

Къ установленію этихъ предложеній сводится простѣйшій изъ двухъ содержащихся въ трактатѣ «Methodus inveniendi...» выводовъ правила Эйлера (для того случая, когда дается *одно* общее всѣмъ разсматриваемымъ кривымъ *свойство* [2]).

На самомъ дѣлѣ, все дѣйствительно обоснованное въ этомъ выводѣ приводитъ лишь къ тому заключенію, что кривая Q, для которой выраженіе $\alpha A + \beta B$ съ постоянными коэффиціентами получаетъ значеніе, представляющее абсолютный maximum или minimum, вмѣстѣ съ тѣмъ обращаетъ выраженіе B въ maximum или minimum—между кривыми, для которыхъ A получаетъ то же значеніе, что и для кривой Q; такъ что, если въ пред-

---

[1]) Это обратное предложеніе не сопровождается доказательствомъ. Нѣсколько ниже (Scholion, p 229—230), предусматривая возможность сомнѣнія въ правильности подобнаго утвержденія (... si quis de praesentis Propositionis conversione in Coroll. I facta etiamnum dubitet,....), Эйлеръ желаетъ его обосновать слѣдующимъ образомъ: «такъ какъ кривая Q, которая между всѣми вообще кривыми даетъ (выраженію) $\alpha A + \beta B$ значеніе maximum или minimum, такова, что между всѣми кривыми, обладающими однимъ и тѣмъ же общимъ свойствомъ A, сообщаетъ (выраженію) B значеніе maximum или minimum, какія бы значенія ни были приписываемы α и β, — то необходимо, чтобы равнымъ образомъ имѣло мѣсто и обратное утвержденіе, если только коэффиціентамъ α и β будетъ приписана наибольшая общность».—Не думаемъ, чтобы эти строки обязывали отказаться отъ тѣхъ сомнѣній, для устраненія которыхъ онѣ предназначены.

[2]) Указанное доказательство распространяется въ томъ же сочиненіи Эйлера (p. 230 - 233) на случай двухъ и, вообще, какого угодно числа общихъ всѣмъ кривымъ *свойствъ*.

ложенной задачѣ на относительный maximum или minimum значеніе A задано и — при надлежащемъ выборѣ α и β — кривая Q (обращающая $\alpha A + \beta B$ въ абсолютный maximum или minimum) сообщаетъ A заданное значеніе, то эта кривая Q представитъ рѣшеніе предложенной задачи.

Но такое заключеніе представляется недостаточнымъ въ смыслѣ обоснованія правила Эйлера. Какъ справедливо, еще въ 1842 году, замѣтилъ о подобномъ доказательствѣ Bertrand [1]), вышеуказаннымъ способомъ обнаруживается, что найденная по правилу Эйлера кривая [которой дѣйствительно соотвѣтствуетъ maximum (minimum) сложнаго выраженія, составленнаго согласно этому правилу] всегда удовлетворяетъ вопросу, но отнюдь не обнаруживается, что получаемыя путемъ примѣненія упомянутаго правила кривыя суть единственно возможныя рѣшенія изопериметрическихъ проблемъ [2]).

Другое находящееся въ сочиненіи «Methodus inveniendi...» доказательство правила Эйлера (для того случая, когда дано *одно* общее всѣмъ кривымъ свойство) заключается въ общихъ чертахъ въ слѣдующемъ.

Придя къ выводу, что — для выполненія требованій проблемы — недостаточно (какъ при изслѣдованіи вопроса объ абсолютномъ maximum'ѣ и minimum'ѣ) разсматривать измѣненіе кривой, происходящее отъ безконечно малаго измѣненія *одной* ординаты, но что нужно измѣнять на величины безконечно малыя двѣ (смежныя) ординаты, Эйлеръ розыскиваетъ значеніе дифференціала, получаемое при такомъ измѣненіи кривой для какого либо *неопредѣленнаго* [3]) выраженія (относящагося къ данной абсциссѣ), и находитъ, что упомянутый дифференціалъ равенъ

$$n\nu . J + o\omega . J'$$

---

[1]) Note sur un point du calcul des variations. Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. VII. 1842. P. 55.

[2]) Не смотря на обнаруженную Bertrand'омъ неудовлетворительность упомянутаго выше доказательства, подобныя доказательства правила Эйлера приводились и послѣ появленія упомянутой статьи Bertrand'a. Такого рода доказательство встрѣчаемъ, напр., въ «Курсѣ варіаціоннаго исчисленія» Лѣтникова, изданномъ въ 1891 году.

[3]) Т. е. измѣняющагося съ измѣненіемъ кривой.

гдѣ nv и $o\omega$ суть безконечно малыя приращенія двухъ смежныхъ ординатъ, при чемъ $nv.J$ представляетъ значеніе диффеенціала того же неопредѣленнаго выраженія, соотвѣтствующее измѣненію на величину nv одной только ординаты (и получаемое на основаніи изложенныхъ въ первой части трактата правилъ [1]).

Такимъ образомъ, разсматривая два неопредѣленныхъ выраженія W и V, и изслѣдуя вопросъ о розысканіи между всѣми кривыми, отнесенными къ одной и той-же данной абсциссѣ и сообщающими выраженію W одно и то же значеніе, такой кривой, на которой выраженіе V получало бы значеніе maximum или minimum, Эйлеръ получаетъ для выраженія V дифференціалъ $nv.dA + o\omega.dA'$ и для выраженія W — дифференціалъ $nv.dB + o\omega.dB'$, гдѣ dA, dA', dB, dB' суть выраженія (вида $T.dx$), извѣстнымъ образомъ составленныя [2]). Для выполненія требованій проблемы эти дифференціалы приравниваются нулю и изъ полученныхъ такимъ образомъ ур-ій получается, путемъ исключенія величинъ nv и $o\omega$, ур-іе для искомой кривой

$$\alpha dA + \beta dB = 0,$$

гдѣ α и β оказываются постоянными. Наконецъ, замѣчаніе, что то же ур-іе получается при розысканіи кривой, на которой выраженіе $\alpha V + \beta W$ достигаетъ абсолютнаго maximum'а или minimum'а, приводитъ къ заключенію, что рѣшеніе поставленной задачи совпадаетъ съ рѣшеніемъ задачи, въ которой требуется среди всевозможныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ одной и той же абсциссѣ, отыскать такую, на которой выраженіе $\alpha V + \beta W$ получаетъ значеніе maximum или minimum [3]).

---

[1]) J имѣетъ видъ T.dx, гдѣ T означаетъ количество *конечное*. Что же касается J', то подъ этимъ символомъ Эйлеръ, согласно принятому имъ въ упоминаемомъ трактатѣ способу обозначенія, разумѣетъ значеніе, получаемое количествомъ J на *послѣдующемъ мѣстѣ* (къ которому относится и ордината, получившая приращеніе $o\omega$).

[2]) При этомъ A и B означаютъ соотвѣтственно значенія V и W, отвѣчающія кривой, представляющей рѣшеніе.

[3]) Подобное же доказательство, основанное на разсмотрѣніи безконечно малыхъ измѣненій *трехъ* ординатъ, приводитъ Эйлера къ аналогичному заключенію, относящемуся къ тому случаю, когда даны *два* общихъ свой-

Доказательство, нѣкоторые моменты котораго здѣсь намѣчены, не представляется строгимъ уже въ виду особаго — въ свое время принятаго, но не соотвѣтствующаго нынѣшнимъ требованіямъ—способа обращаться съ безконечно малыми. Но и помимо этого,—даже съ точки зрѣнія тѣхъ принциповъ, на которыхъ основанъ анализъ Эйлера—въ доказательствѣ есть слабый пунктъ, на который необходимо обратить вниманіе.

Ур-ія

$$n\nu.dA + o\omega.dA' = 0,$$

$$n\nu.dB + o\omega.dB' = 0,$$

изъ которыхъ получается вышеуказанное ур-іе $\alpha dA + \beta dB = 0$, Эйлеръ находитъ на основаніи замѣчанія [1]), заключающагося въ томъ, что — согласно требованію задачи — должно, вводя безконечно малое измѣненіе кривой (представляющей рѣшеніе), распорядиться такъ, чтобы общее свойство имѣло одно и то же значеніе на самой кривой (представляющей рѣшеніе) и на кривой измѣненной; для достиженія чего Эйлеръ считаетъ достаточнымъ, введя безконечно малыя измѣненія двухъ смежныхъ ординатъ, приравнять нулю дифференціалъ того выраженія, которое представляетъ общее свойство. Такимъ образомъ получается второе изъ написанныхъ выше ур-ій; при предположеніи же, что измѣненія $n\nu$ и $o\omega$ ординатъ опредѣлены такъ, что упомянутое выраженіе, представляющее общее свойство, не измѣняетъ своего значенія, получается и первое ур-іе, какъ необходимое условіе maximum'а (minimum'а).

Но легко видѣть, что условія $W = const. = B$ *) и $n\nu.dB + o\omega.dB' = 0$ — не эквивалентны. Въ самомъ дѣлѣ, послѣднее ур-іе вытекаетъ не только изъ $W = const. = B$, но и изъ $B = maxim.W$ [а также и изъ другихъ условій]. Такъ что нельзя утверждать, что всякій разъ, когда удовлетворяется ур-іе $n\nu.dB + o\omega.dB' = 0$, выполняется также требованіе $W = const.$;

ства, которыми должны обладать всѣ разсматриваемыя кривыя; послѣ чего слѣдуетъ замѣчаніе относительно проблемъ, въ которыхъ дается болѣе двухъ общихъ всѣмъ разсматриваемымъ кривымъ свойствъ: методъ рѣшенія такихъ проблемъ считается выясненнымъ предшествующими изслѣдованіями простѣйшихъ случаевъ.

[1]) Op. cit. P. 176—177 (Propositio II, Solutio).

*) гдѣ W означаетъ выраженіе, представляющее общее свойство.

нельзя также утверждать — по крайней мѣрѣ, a priori — что при *нѣкоторыхъ* значеніяхъ nv и $o\omega$, удовлетворяющихъ ур-ію $nv.dB + o\omega.\ dB' = 0$, выполняется условіе $W = const$. Такимъ образомъ и второе [1]) доказательство Эйлера оказывается недостаточнымъ.

Мы остановились съ такою подробностью на этомъ послѣднемъ доказательствѣ въ виду того, что идея, лежащая въ основаніи этого доказательства, служитъ исходною точкою большинства доказательствъ правила Эйлера, предложенныхъ послѣдующими авторами.

Именно, при выводѣ правила Эйлера — а также при выводѣ Лагранжева метода множителей — условія

$$u_k = c_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

гдѣ c_k — постоянныя числа (въ частности, нули), замѣняютъ обыкновенно ур-іями

$$\delta u_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и считаютъ достаточнымъ подчинить всѣ варіаціи условіямъ, которыя выражаются этими послѣдними уравненіями.

Недостатокъ такого пріема, сводящагося, въ сущности, къ признанію эквивалентности условій вида $u_k = c_k$ и условій вида $\delta u_k = 0$, усматривается уже изъ того, что было сказано выше о второмъ доказательствѣ Эйлера. Считая важнымъ детально выяснить допускаемую такимъ образомъ неправильность, мы обратимся къ доказательству предложенному Bertrand'омъ въ упомянутой уже статьѣ «Note sur un point du calcul des variations».

«Предположимъ, говоритъ Bertrand, что вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы сдѣлать $\int_a^b U dx$ maximum, при условіи, что $\int_a^b V dx$ остается постояннымъ; нужно, какъ извѣстно, чтобы

[1]) Въ трактатѣ Эйлера оно является по порядку первымъ.

варіація $\delta\int_a^b Udx$ сводилась къ нулю всякій разъ, когда $\delta\int_a^b Vdx$ равно нулю».

Отсюда, останавливаясь сначала на случаѣ постоянныхъ предѣльныхъ значеній и означая чрезъ u и v ф-ціи, получаемыя извѣстнымъ образомъ изъ ф-цій U и V, Bertrand дѣлаетъ заключеніе, что интегралъ $\int_a^b \omega u dx$ долженъ исчезать для всѣхъ значеній ω, при которыхъ $\int_a^b \omega v dx = 0$. Замѣтивши затѣмъ, что это требованіе удовлетворяется, если положить

$$u = cv\,,$$

гдѣ c представляетъ постоянную, Bertrand переходитъ къ доказательству, что условіе $u = cv$ является необходимымъ. Допустивши, что отношеніе $\frac{u}{v}$ не равно постоянной величинѣ, онъ приходитъ къ заключенію, что ф-ція ω можетъ быть опредѣлена такъ, что, обращая интегралъ $\int_a^b \omega v dx$ въ нуль, будетъ давать интегралу $\int_a^b \omega . u\, dx$ отличное отъ нуля значеніе. Отсюда дѣлается тотъ выводъ, что ни относительный maximum, ни относительный minimum не имѣютъ мѣста, если $\frac{u}{v}$ не представляетъ величины постоянной.

Обратившись затѣмъ къ выраженіямъ варіацій

$$\varphi_a - \varphi_b + \int_a^b \omega u dx,$$

$$\psi_a - \psi_b + \int_a^b \omega v dx,$$

относящимся къ общему случаю — перемѣнныхъ предѣльныхъ значеній, приведя извѣстныя соображенія въ доказательство того, что и въ этомъ случаѣ должно имѣть мѣсто ур-іе $u = cv$, и замѣнивши, на основаніи этого ур-ія, первое изъ вышеприведенныхъ выраженій — выраженіемъ

$$\varphi_a - \varphi_b + c\int_a^b \omega v dx,$$

Bertrand — пользуясь положеніемъ, что при

$$\psi_a - \psi_b + \int_a^b \omega v dx = 0$$

должно имѣть мѣсто равенство

$$\varphi_a - \varphi_b + c\int_a^b \omega v dx = 0, -$$

приходитъ къ ур-ію

$$\varphi_a - \varphi_b = c\,(\,\psi_a - \psi_b\,),$$

которое должно имѣть мѣсто при всякихъ (допускаемыхъ *предѣльными* условіями задачи) предѣльныхъ значеніяхъ варіацій.

Ур-ія же

$$u = cv, \qquad \varphi_a - \varphi_b = c\,(\psi_a - \psi_b\,),$$

какъ замѣчаетъ Bertrand, суть именно тѣ, которыя приходится разсматривать при опредѣленіи (абсолютнаго) maximum'a или minimum'a интеграла $\int_a^b (U - cV)dx$

Такимъ образомъ въ основаніи доказательства Bertrand'a лежитъ то положеніе, что получаемая при варіированіи кривой, представляющей рѣшеніе, варіація

$$\delta\int_a^b Udx$$

должна исчезать, если только удовлетворяется условіе

$$\delta \int_a^b V dx = 0$$

[а также требованія, относящіяся къ предѣльнымъ значеніямъ перемѣнныхъ].

Но въ то время, какъ ур-іе $\delta \int_a^b V dx = 0$ вытекаетъ изъ ур-ія $\int_a^b V dx = const$, обратное утвержденіе было бы неправильнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\delta \int_a^b V dx = 0$ можетъ получиться при нѣкоторыхъ условіяхъ, несовмѣстныхъ съ условіемъ $\int_a^b V dx = const$, — напр., при томъ условіи, что измѣняющаяся по нѣкоторому опредѣленному закому кривая сообщаетъ интегралу $\int_a^b V dx$ значеніе maximum (minimum), когда совпадаетъ съ кривою, представляющею рѣшеніе изопериметрической проблемы.

Ясно, такимъ образомъ, что условіемъ $\delta \int_a^b V dx = 0$ выдѣляется въ группу сравниваемыхъ кривыхъ, вообще говоря, болѣе обширная система кривыхъ, нежели условіемъ $\int_a^b V dx = const.$ Группа сравниваемыхъ кривыхъ, соотвѣтствующая этому послѣднему условію, входитъ въ группу, выдѣляемую условіемъ $\delta \int_a^b V dx = 0$, при чемъ къ этой послѣдней группѣ могутъ относиться и другія кривыя,—не принадлежащія къ первой группѣ.

Но кривой, которая представляетъ линію maximum'а или minimum'а нѣкоторой величины между кривыми, принадлежащими къ нѣкоторой ограниченной группѣ сравниваемыхъ линій, — можетъ и не соотвѣтствовать maximum или minimum той же величины, если къ упомянутой группѣ сравниваемыхъ линій присоединить новыя линіи.

Такимъ образомъ кривая, которая между кривыми, выдѣляемыми условіемъ $\int_a^b Vdx = const$, обращаетъ $\int_a^b Udx$ въ maximum (minimum), можетъ и не оказаться линіей, обращающей послѣдній интегралъ въ maximum (minimum), среди кривыхъ, выдѣляемыхъ условіемъ $\delta\int_a^b Vdx = 0$.

Въ виду этого представляется во всякомъ случаѣ сомнительнымъ указанное выше положеніе Bertrand'а.

Нижеслѣдующій же примѣръ обнаруживаетъ, что положеніе это приводитъ и къ неправильнымъ выводамъ.

Данъ кругъ радіуса r, два взаимно перпендикулярныхъ діаметра $X'OX$, $Y'OY$ и прямая KL, параллельная діаметру $X'OX$ (и не имѣющая съ данною окружностью общихъ точекъ [1]). Разсматриваются линіи, соединяющія центръ круга O съ точками полуокружности $Y'XY$ и имѣющія данную длину l, которая меньше разстоянія прямой KL отъ центра O [вслѣдствіе чего разсматриваемыя линіи не могутъ имѣть общихъ точекъ съ прямою KL].

Требуется опредѣлить между этими линіями такую, которая съ двумя перпендикулярами, опущенными изъ ея концовъ на прямую KL, и съ отрѣзкомъ прямой KL, заключеннымъ между указанными перпендикулярами, ограничивала бы наибольшую площадь.

Если разсматриваемыя кривыя отнесемъ къ прямоугольной системѣ координатъ, ось x'овъ которой направлена по радіусу OX, ось y'овъ—по радіусу OY, и означимъ чрезъ m разстояніе между прямыми $X'OX$ и KL, то вопросъ сведется къ опредѣ-

[1]) См. черт. 1.

ленію maximum'а интеграла $\int_{x_0}^{x_1}(y+m)dx$ при условіи

$$\int_{x_0}^{x_1}+\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

и при слѣдующихъ требованіяхъ, относящихся къ предѣльнымъ значеніямъ перемѣнныхъ:

$$x_0=0\ ,\quad y_0=0\ ;\qquad x_1=+\sqrt{r^2-y_1{}^2}$$

гдѣ y_0 и y_1 представляютъ значенія y, соотвѣтствующія $x=x_0$ и $x=x_1$ [1]).

Если положимъ $l=r$, то, въ силу условія

$$\int_{x_0}^{x_1}+\sqrt{1+y'^2}dx=l=r,$$

группа разсматриваемыхъ линій будетъ состоять исключительно изъ прямыхъ, соединяющихъ точку O съ точками дуги $Y'XY$. Задача будетъ имѣть опредѣленное рѣшеніе, которое представится радіусомъ, проведеннымъ къ опредѣленной точкѣ дуги XAY.

Съ другой стороны, условіе

$$\delta\int_{x_1}^{x_0}+\sqrt{1+y'^2}dx=0$$

не внесетъ никакихъ ограниченій относительно варіацій перемѣнныхъ, ибо при всякихъ варіаціяхъ (соотвѣтствующихъ указаннымъ выше *предѣльнымъ* условіямъ) ур-іе

$$\delta\int_{x}^{x_1}+\sqrt{1+y'^2}dx=0$$

[1]) Выражая площадь и длину интегралами $\int_{x_0}^{x_1}(y+m)dx$ и $\int_{x_0}^{x_1}+\sqrt{1+y'^2}dx$ мы неявно подчиняемъ разсматриваемыя линіи еще тому ограниченію, что ордината y каждой кривой должна быть однозначною ф-ціею абсциссы, имѣющею внутри промежутка $x_0\dots x_1$ производную y'. Эту производную мы предполагаемъ непрерывною —внутри упомянутаго промежутка—ф-ціею абсциссы.

будетъ удовлетворяться, такъ какъ линія, представляющая рѣшеніе задачи, обращаетъ интегралъ $\int_{x_0}^{x_1}+\sqrt{1+y'^2}dx$ въ minimum, при существованіи указанныхъ предѣльныхъ условій [1]).

Если бы мы приняли упомянутое выше положеніе (которымъ пользуется Bertrand), то пришли бы къ заключенію, что $\delta\int_{x_0}^{x_1}(y+m)dx$ должно исчезать при всякихъ варіаціяхъ, соотвѣтствующихъ предѣльнымъ условіямъ. А это, очевидно, не выполняется.

Если, далѣе, къ рѣшенію поставленной задачи примѣнить правило Эйлера въ томъ видѣ, въ какомъ доказываетъ его Bertrand, въ какомъ даетъ его самъ Эйлеръ въ одномъ изъ позднѣйшихъ своихъ мемуаровъ[2]) и въ какомъ оно обыкновенно излагается въ настоящее время, т. е, если свести вопросъ къ опредѣленію абсолютнаго maximum'а интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1}(y+m+c\sqrt{1+y'^2})dx,$$

то получится дифференціальное ур-іе

$$1-\frac{d}{dx}\frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

которое ни при какомъ c не удовлетворяется на прямой линіи, представляющей рѣшеніе задачи (при $l=r$). Такимъ образомъ, если бы мы—не входя ни въ какія соображенія — просто примѣнили въ этомъ случаѣ правило Эйлера въ томъ видѣ, въ какомъ оно обыкновенно примѣняется, то отъ насъ ускользнуло бы правильное рѣшеніе задачи.

Но если бы, вмѣсто интеграла $\int_{x_0}^{x_1}(y+m+c\sqrt{1+y'^2})dx$, мы

---

[1]) Этотъ minimum будетъ такъ называемый неполный minimum.

[2]) Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi. (Institutionum calculi integralis vol. IV. Petropoli. 1794. P. 620).

взяли интегралъ

$$\int_{x_0}^{x_1}[\alpha(y+m)+\beta\sqrt{1+y'^2}]dx-$$

согласно правилу, данному Эйлеромъ въ «Methodus inveniendi..» то получили бы дифференціальное ур-іе

$$\alpha-\frac{d}{dx}\frac{\beta y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

имѣющее, при $\alpha=0$, рѣшеніе $y=ax+b$, которое, при извѣстныхъ значеніяхъ постоянныхъ a и b $[b=0]$, представляетъ прямую, отрѣзокъ которой служитъ рѣшеніемъ задачи.

Замѣна условій вида

$$u_k=c_k \qquad (k=1,2,...)$$

условіями

$$\delta u_k=0,$$

—и при томъ безъ всякаго доказательства законности такой замѣны—является общимъ пріемомъ большинства тѣхъ доказательствъ правила Эйлера, которыя не основаны на Лагранжевомъ правилѣ множителей и не сводятся къ разсужденію (ведущему начало отъ Эйлера), недостаточность котораго, какъ упомянуто выше, указана Bertrand'омъ.

Къ числу такихъ доказательствъ, основанныхъ на вышеуказанной замѣнѣ однихъ условій другими, относятся предложенныя въ недавнее, сравнительно, время доказательства P. du Bois-Reymond'a [1]), Scheeffer'a [2]), Dixon'a [3]).

Что касается доказательствъ, основанныхъ на Лагранжевомъ методѣ множителей, то они ведутъ начало отъ Лагранжа,

---

[1]) Mathematische Annalen. 1879. XV. S. 309–312.

[2]) Mathematische Annalen. 1885. XXV Band. 4. Heft. 583—588. Scheeffer рѣшаетъ обобщенную изопериметрическую проблему, въ которой, кромѣ интеграловъ съ заданными значеніями, даются еще условія въ видѣ *конечныхъ* (не дифференціальныхъ) ур-ій.

[3]) On a point in the Calculus of Variations The Messenger of Mathematics. 1896. Vol. XXVI. No. 4. P. 54—56.