РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Г. В. ПЛЕХАНОВА

О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Под общей редакцией **О. В. Татарникова**

Допущено Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2015

УДК 512.6
ББК 22.143я73
Т23

***Авторы*:**

Татарников Олег Вениаминович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики экономико-математического факультета Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова;

Чуйко Анатолий Степанович — кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики экономико-математического факультета Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова;

Шершнев Владимир Григорьевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики экономико-математического факультета Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова.

***Рецензенты*:**

Орел Е. Н. — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики-1 Финансового университета при Правительстве Российской Федерации;

Вокин Г. Г. — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий базовой кафедрой управления и информационных технологий в космических системах Финансовой технологической академии при Научно-исследовательском институте космических систем им. А. А. Максимова — филиала Государственного космического научно-производственного центра им. М. В. Хруничева.

Татарников, О. В.

Т23 Линейная алгебра : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 334 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-3924-8

Алгебра — это раздел математики, в котором изучаются действия над объектами произвольной природы.

В учебник включены основные сведения из линейной алгебры, которые используются студентами при получении квалификации бакалавра экономики на этапах дальнейшего обучения. Содержание и объем материала учебника соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения изучения дисциплины «Линейная алгебра». Излагаемые понятия, утверждения и следствия из них иллюстрируются примерами. Ответы на вопросы и решения задач, приведенные в конце каждого раздела, помогут лучше усвоить материал дисциплины.

Для студентов любой формы обучения.

УДК 512.6
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-9916-3924-8

Оглавление

Предисловие

Мотивацией к написанию учебника «Линейная алгебра» послужило то обстоятельство, что высшая школа стала готовить бакалавров экономики по новой учебной программе, многие разделы которой не отражены в существующих учебниках. К тому же в программе сделан акцент на бóльшую самостоятельность студента при изучении дисциплины, что требует доходчивого изложения основ линейной алгебры, с целью подготовить студента к изучению ее приложений в экономике.

При подборе материала авторы испытывали трудности: учебник, содержащий все методы линейной алгебры, применяемые при анализе экономических проблем, был бы непомерно велик. В связи с этим в учебник включались только те методы, которые постоянно используются в процессе дальнейшего обучения и при решении различных по содержанию экономических задач. Поэтому настоящий учебник не исчерпывает всех вопросов линейной алгебры и математического программирования. Его основная цель — дать студентам представление о теории систем линейных уравнений и неравенств и на этой базе ввести их в круг математических методов, используемых для решения проблем оптимизации экономических процессов.

«Линейная алгебра» относится к базовой части дисциплин математического цикла. Поэтому результаты изучения дисциплины формируют компетенции, которые определены требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 Экономика (квалификация «Бакалавр») к освоению математического цикла основных образовательных программ бакалавриата. К ним относятся следующие общекультурные (ОК) и профессиональные (ПК) компетенции:

• владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

• владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, обладание навыками работы с компьютером как средством управления информацией, способность работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-12);

• способность собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

• способность на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);

• способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

• способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

• способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

• способность на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);

• способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-10);

• способность использовать для решения коммуникативных задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-12);

• способность преподавать экономические дисциплины в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы (ПК-14);

• способность принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин (ПК-15).

В результате сформированных компетенций студент должен:

знать

• понятия, используемые для математического описания экономических процессов (ОК-12, ПК-1—ПК-5);

• содержание утверждений и следствий из них, используемых для обоснования выбираемых математических методов решения экономических задач (ОК-12, ПК-1 ПК-5);

уметь

• доказывать и обосновывать сформулированные утверждения и следствия из них (ОК-1, ОК-12, ПК-1, ПК-5, ПК-6);

• выбирать способы решения поставленных математических задач (ПК-1 ПК-6);

• анализировать и интерпретировать (ПК-1, ПК-4, ПК-6);

владеть

• вычислительными операциями над объектами экономической природы (ПК-1, ПК-3, ПК-10, ПК-12);

• навыками сведения экономических задач к математическим задачам (ПК-1, ПК-4—ПК-6);

• навыками анализа и обработки необходимых данных для математической постановки и решения экономических задач (ОК-12, ПК-1, ПК-4, ПК-6);

• методами и техническими средствами решения математических задач (ПК-1, ПК-5, ПК-10, ПК-12);

• навыками анализа и интерпретации результатов решения задач (ПК-6).

Оглавление учебника дает достаточно полное представление о нем и вряд ли стоит подробно пересказывать его содержание.

Первая часть учебника знакомит студента с классическими методами исследования и решения систем линейных уравнений. Изложению этих методов предшествует введение необходимого математического аппарата, который содержит все разделы линейной алгебры, предусмотренные программой подготовки бакалавра экономики. В учебнике при решении различных задач преимущественно используется метод Жордана — Гаусса.

Вторая часть учебника полностью посвящена обоснованию методов решения прикладных экономических задач и сведение их постановок к моделям, анализ которых возможно провести с помощью хорошо отработанных алгоритмов, к которым в первую очередь относится симплекс-алгоритм.

В учебнике приводится обоснование почти всех сформулированных утверждений, так как авторы считают, что процесс доказательства формирует и развивает логику мышления и является одной из основных ценностей изучения математических дисциплин.

Настоящее издание учебника предназначается для студентов экономических факультетов любой формы обучения. Поэтому в учебнике разобрано много примеров и задач, иллюстрирующих теоретический материал и дающих образцы решения задач.

В тексте учебника почти полностью отсутствуют ссылки на литературу, связанную с данной дисциплиной. Источники, из которых черпались многие задачи и примеры, остались без ссылок. Поэтому просим авторов их отнестись к этому снисходительно.

Считаем своим долгом, с благодарностью отметить влияние, которое оказали на содержание учебника наши коллеги: профессоры В. Е. Барбаумов, Б. М. Рудык, Р. В. Сагитов.

Раздел I

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В результате изучения материала данного раздела студент должен:

знать типы систем линейных уравнений, способы и виды их решений, операции над матрицами, метод нахождения собственных значений и собственных векторов матриц, операторы преобразования квадратичных форм;

уметь ставить простейшие экономические задачи и проводить их анализ с использованием исчислений матриц и решений систем линейных уравнений;

владеть методом Жордана — Гаусса для нахождения фундаментальных решений системы линейных уравнений, определителя матрицы, обратной матрицы, выявлять линейно зависимые и линейно независимые системы векторов и находить их базисы.

Глава 1
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В результате изучения материала данной главы студент должен: ***знать*** элементарные преобразования систем линейных уравнений и виды общего, частного и базисного решений их; ***уметь*** обосновать метод Жордана — Гаусса и ***владеть*** этим методом для решения систем линейных уравнений, а также анализом моделей межотраслевого баланса.

Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где x_j — неизвестное, $j = 1, 2, \ldots, n$; a_{ij} — коэффициент при j-м неизвестном в i- уравнении $i = 1, 2, \ldots, m$; b_i — свободный член i-го уравнения.

Таблицу коэффициентов при неизвестных будем называть *матрицей условий системы линейных уравнений* (СЛУ). Обозначим матрицу условий, вектор неизвестных и вектор свободных членов СЛУ соответственно

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_i \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда матричная форма записи СЛУ(1) будет иметь вид

$$AX = B.$$

Если строки матрицы условий обозначить через

$$A^1 = (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n}),\ A^2 = (a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n}), \ldots,$$
$$A^m = (a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn}),$$

то систему можно записать в векторной форме

$$\begin{cases} A^1X = b_1, \\ A^2X = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^mX = b_m. \end{cases}$$

Если обозначить столбцы матрицы условий через

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

то (1.1) можно записать в виде

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_jx_j + \dots + A_nx_n = B.$$

Определение. *Решением СЛУ* (1) называется такой набор из n чисел $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, или такой n-мерный вектор $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, что каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство после замены в нем неизвестных x_j соответствующими числами k_j, где $j = 1, 2, \dots, n$.

Определение. Если система (1) не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Определение. Если система (1) обладает хотя бы одним решением, то она называется *совместной.*

Определение. Совместная СЛУ называется *определенной*, если она обладает одним единственным решением, и *неопределенной*, если решений более, чем одно.

Определение. Две СЛУ называются *равносильными*, если они имеют одни и те же решения.

Определение. Если в i-м уравнении коэффициенты при всех неизвестных и свободный член равны нулю, т.е. $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = b_i = 0$, то любой n-мерный вектор является решением этого уравнения, поэтому такое уравнение называется *тривиальным.*

Определение. Если в i-м уравнении коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, т.е. $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$, а свободный член не равен нулю, т.е. $b_i \neq 0$, то невозможно найти n-мерный вектор, который является решением этого уравнения, поэтому такое уравнение называется *противоречивым.*

Теорема. Система линейных уравнений, содержащая тривиальное уравнение, равносильна той же системе без тривиального уравнения.

► Рассмотрим систему линейных уравнений (2) с тривиальным уравнением

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_j + \ldots + 0x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

и ту же систему, но без тривиального уравнения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть вектор $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ является решением системы (2). Тогда вектор K является решением каждого уравнения системы (2), а также и решением каждого уравнения системы (3). Следовательно, вектор LK является и решением системы (3).

Обратно, пусть вектор $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ является решением системы (3). Тогда вектор L является решением каждого уравнения системы (3), а также и решением каждого уравнения системы (2). По определению любой n-мерный вектор является решением тривиального уравнения. Поэтому и вектор L также является решением тривиального уравнения. Следовательно, вектор L является решением системы (2).

Таким образом, система линейных уравнений, содержащая тривиальное уравнение, равносильна этой же системе без тривиального уравнения. ◄

Следствие. При решении систем линейных уравнений тривиальное уравнение можно не рассматривать (вычеркивать).

Определение. Неизвестное x_j называется *разрешенным*, если в системе линейных уравнений (1.1) существует s-е уравнение, содержащее это неизвестное с коэффициентом $a_{sj} = 1$, а в остальных уравнениях системы (1.1) коэффициенты при этом неизвестном равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq s$.

Пример. В системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 2x_5 - x_6 = 3, \\ x_2 + 3x_4 - x_5 + x_7 = 5, \\ x_3 + x_4 - 15x_5 - 4x_6 = -2 \end{cases} \tag{*}$$

x_1, x_2, x_3, x_7 — разрешенные неизвестные.

Определение. Система линейных уравнений называется *разрешенной*, если каждое уравнение системы содержит хотя бы одно разрешенное неизвестное.

Определение. Если из каждого уравнения данной разрешенной системы линейных уравнений выбрать по одному разрешенному неизвестному, то полученную совокупность неизвестных называют *набором разрешенных* (или *базисных*) неизвестных данной системы.

Пример. Система (*) является разрешенной, причем в этой системе можно выбрать два набора разрешенных неизвестных: (x_1, x_2, x_3) и (x_1, x_7, x_3).

Рассмотрим разрешенную систему с n неизвестными: $(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которой существует набор из r разрешенных неизвестных: $(x_1, x_2, ..., x_r)$. Такую систему принято называть *общим решением*. При этом возможны два варианта:

1) если $r = n$, то система имеет *единственное решение*

$$\begin{cases} x_1 = b_1, \\ x_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_r = b_r; \end{cases} \tag{4}$$

2) если $r < n$, то систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 + a_{1(r+1)}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2(r+1)}x_{r+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{5}$$

Определение. Неизвестные называются *свободными* для данного набора разрешенных неизвестных в разрешенной системе линейных уравнений, если они не вошли в данный набор.

Пример. В системе (5) свободными неизвестными являются $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$, а в системе (*) неизвестные (x_4, x_5, x_6, x_7) являются свободными для набора (x_1, x_2, x_3).

Систему (5) можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + c_{1(r+1)}x_{r+1} + ... + c_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 + c_{2(r+1)}x_{r+1} + ... + c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b_r + c_{r(r+1)}x_{r+1} + ... + c_{rn}x_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $c_{ij} = -a_{ij}$ и (5) $\Leftrightarrow$ (6).

Теорема (свойство свободных неизвестных). Если в разрешенной системе линейных уравнений (6) придать свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ произвольные значения $k_{r+1}, k_{r+2}, ..., k_n$, т.е. $x_{r+1} = k_{r+1}, x_{r+2} = k_{r+2}, ..., x_n = k_n$, то найдется единственное решение этой системы в виде n-мерного вектора K, у которого значения координат, соответствующих свободным неизвестным, равны $k_{r+1}, k_{r+2}, ..., k_n$.

► Подставим $x_{r+1} = k_{r+1}, x_{r+2} = k_{r+2}, ..., x_n = k_n$ в систему (6). Тогда разрешенные неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$ примут значения $k_1, k_2, ..., k_r$ такие, что

$$\begin{cases} k_1 = b_1 + c_{1(r+1)}k_{r+1} + ... + c_{1n}k_n, \\ k_2 = b_2 + c_{2(r+1)}k_{r+1} + ... + c_{2n}k_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_r = b_r + c_{r(r+1)}k_{r+1} + ... + c_{rn}k_n. \end{cases} \quad (7)$$

Так как вектор $K = (k_1, k_2, ..., k_r, k_{r+1}, k_{r+2}, ..., k_n)$ обращает каждое уравнение системы (5) в точное числовое равенство, то он является решением этой системы. Таким образом, доказано *существование* решения системы (5).

Докажем *единственность* такого решения. Пусть вектор $L = (l_1, l_2, ..., l_r, k_{r+1}, k_{r+2}, ..., k_n)$ с теми же значениями свободных неизвестных является также решением системы (5). Тогда подставив его в систему (5), получим

$$\begin{cases} l_1 = b_1 + c_{1(r+1)}k_{r+1} + ... + c_{1n}k_n, \\ l_2 = b_2 + c_{2(r+1)}k_{r+1} + ... + c_{2n}k_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_r = b_r + c_{r(r+1)}k_{r+1} + ... + c_{rn}k_n. \end{cases} \quad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), видим, что $l_1 = k_1, l_2 = k_2, ..., l_r = k_r$. Таким образом, доказано, что существует единственное решение системы (5) с заданными значениями свободных неизвестных. ◄

Замечания

1. Так как значения свободных неизвестных можно задать бесконечно большим числом способов, то система (5) является неопределенной.

2. Разрешенная система линейных уравнений всегда совместна. При этом она определена, если $m = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных, и не определена, если число уравнений меньше числа неизвестных, т.е. $m < n$.

Преобразование систем линейных уравнений

Мы уже представляем, как выглядит общее решение системы линейных уравнений. Поэтому, чтобы найти общее решение данной совместной системы линейных уравнений, необходимо перейти от данной системы к равносильной ей разрешенной системе.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A^1X = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^iX = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^jX = b_j, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^mX = b_m, \end{cases} \tag{9}$$

где $A^i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $A^j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$, $i = 1, 2, ..., m$, $X^{\mathrm{T}} =$ $= (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Покажем, что существует преобразование, которое позволяет перейти от исходной системы линейных уравнений к равносильной разрешенной системе.

Утверждение. Элементарные преобразования:

• умножение обеих частей любого уравнения исходной системы на число, не равное нулю;

• замена i-го уравнения $A^iX = b_i$ в системе (9) уравнением вида $A^iX + A^jX = b_i + b_j$ позволяет переходить от исходной системы линейных уравнений к равносильной.

► Очевидно, что умножение обеих частей любого уравнения исходной системы на число, не равное нулю, переводит исходную СЛУ к равносильной.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть вектор K — решение системы (9), тогда вектор K — решение любого уравнения системы (9) и поэтому обращает в верное числовое равенство i-е и j-е уравнения, т.е. $A^iX = b_i$ и $A^jX = b_j$. Сложив эти числовые равенства, получим числовое равенство $A^iK + A^jK = b_i + b_j$, из которого следует, что вектор K является решением уравнения вида $A_iX + A_jX = b_i + b_j$, а, следовательно, и системы

$$\begin{cases} A^1X = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^iX + A^jX = b_i + b_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^jX = b_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^mX = b_m, \end{cases} \tag{10}$$

которая отличается от (9) только i-м уравнением.

Обратно, пусть вектор L — решение системы (10), тогда вектор L — решение каждого уравнения этой системы и обращает i-е и j-е уравнения в верные числовые равенства $A^iL + A^jL = b_i + b_j$ и $A^jL = b_j$. Вычитая второе равенство из первого, получаем верное числовое равенство $A^iL = b_i$, из которого следует, что вектор L является решением уравнения $A^iX = b_i$, а следовательно и системы (9), так как она отличается от (10) только i-м уравнением.

Таким образом, показано, что решение системы (9) есть решение системы (10) и обратно. Следовательно, доказана равносильность систем (9) и (10). ◄

Жорданово преобразование

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{11}$$

где $a_{rs} \neq 0$.

Определение. *Жордановым преобразованием* системы линейных уравнений с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$ называется совокупность двух операций.

1. Умножение r-го уравнения системы (11) на число $\dfrac{1}{a_{rs}}$ (деление на разрешающий элемент a_{rs}), после чего получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \ldots + 1x_s + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{12}$$

где $a'_{rj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}}\ \forall j \neq s$; $b'_r = \dfrac{b_r}{a_{rs}}$.

2. При помощи r-го уравнения системы (12) исключаем из всех остальных уравнений системы неизвестное x_s, прибавляя к первому уравнению r-е уравнение, умноженное на $(-a_{1s})$, ко второму уравнению — r-е уравнение, умноженное на $(-a_{2s})$ и т.д. После чего система (12) преобразуется в систему

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + 0x_s + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \ldots + 1x_s + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + 0x_s + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, с помощью Жорданова преобразования получили систему с разрешенным неизвестным x_s. Так как Жорданово преобразование состоит из последовательного применения элементарных преобразований, то оно переводит систему (12) в равносильную систему.

Пример. Выполнить преобразование Жордана с разрешающим элементом a_{23} следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

► Для выполнения Жорданова преобразования векторы условий и свободные члены данной системы записывают в исходную таблицу.

Строку, в которой находится разрешающий элемент $a_{23} = 2$, умножаем на обратную к нему величину, т.е. на 1/2. Результат записываем во вторую строку новой таблицы.

Затем полученную строку умножаем на (–4) и прибавляем к первой строке исходной таблицы. Результат записываем в первую строку новой таблицы. Аналогично поступаем с третьей строкой исходной таблицы, сложив ее со второй строкой новой таблицы, предварительно умножив ее на (–1).

A_1	A_2	A_3	A_4	B
2	7	4	1	6
3	5	**2**	2	4
4	4	1	7	2

A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	B
–4	–3	0	–3	–2
1,5	2,5	1	1	2
2,5	1,5	0	6	0

◄

Определение. *Общим решением* данной системы линейных уравнений называется равносильная ей разрешенная система линейных уравнений.

Определение. *Частным решением* данной СЛУ называют решение, полученное из общего, присвоением конкретных значений свободным переменным.

Определение. *Базисным решением* данной СЛУ называется частное решение, полученное из общего, присвоением нулевых значений свободным переменным.

При этом базисное решение называется *невырожденным*, если число ненулевых координат его равно числу разрешенных неизвестных, входящих в выбранный набор разрешенных неизвестных системы. Если же ненулевых координат в базисном решении меньше числа разрешенных неизвестных в выбранном наборе, то такое базисное решение называется *вырожденным*.

Решение системы линейных уравнений методом Жордана – Гаусса

Методом Жордана – Гаусса данная СЛУ приводится к равносильной разрешенной СЛУ, т.е. к общему решению данной СЛУ.

Пусть дана СЛУ (1):

A_1	A_2	A_3	...	A_n	B
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	b_m

Шаг 1. Смотрим в данной системе линейных уравнений:

• имеются ли тривиальные уравнения, если имеются, то вычеркиваем их;

• имеются ли противоречивые уравнения, если имеются, то исходная система является несовместной и процесс решения заканчивается;

• в каждом ли уравнении системы имеется хотя бы одна разрешенная неизвестная, если в каждом, то найдено общее решение данной системы и процесс решения заканчивается. Если же найдется уравнение, в котором нет разрешенной неизвестной, то выбираем в нем разрешающий элемент, не равный нулю, например $a_{11} \neq 0$, и выполняем преобразование Жордана.

Тогда получим систему (2):

A'_1	A'_2	A'_3	...	A'_n	B'
1	a'_{12}	a'_{13}	...	a'_{1n}	b'_1
0	a'_{22}	a'_{23}	...	a'_{2n}	b'_2
...	...	...	...	...	...
0	a'_{m2}	a'_{m3}	...	a'_{mn}	b'_m

Шаг 2. Смотрим в этой системе:

• имеются ли тривиальные уравнения, если имеются, то вычеркиваем их;

• имеются ли противоречивые уравнения, если имеются, то исходная система является несовместной и процесс решения заканчивается;

• в каждом ли уравнении системы имеется хотя бы одна разрешенная неизвестная, если в каждом, то найдено общее решение данной системы и процесс решения заканчивается. Если же найдется уравнение, в котором нет разрешенной неизвестной, то выбираем в этом уравнении разрешающий элемент, не равный нулю, например $a'_{23} \neq 0$, и выполняем преобразование Жордана.

Тогда получим систему (3):

A''_1	A''_2	A''_3	...	A''_n	B''
1	a''_{12}	0	...	a''_{1n}	b''_1
0	a''_{22}	1	...	a''_{2n}	b''_2
...	...	...	...	...	...
0	a''_{m2}	0	...	a''_{mn}	b''_m

и т.д.

На k-м шаге проводим действия с системой (k), полученной на предыдущем шаге. Смотрим, в системе (k):

• имеются ли тривиальные уравнения, если имеются, то вычеркиваем их;

• имеются ли противоречивые уравнения, если имеются, то система является несовместной и процесс решения заканчивается;

• в каждом ли уравнении системы (k) имеется хотя бы одна разрешенная неизвестная, если в каждом, то найдено общее решение данной системы и процесс решения заканчивается. Если же найдется уравнение, в котором нет разрешенной неизвестной, то выбираем в нем разрешающий элемент, не равный нулю, например, $a^*_{kj} \neq 0$ и выполняем преобразование Жордана.

Очевидно, что после k-го шага в СЛУ содержится не меньше, чем k уравнений. Причем каждое из первых k уравнений содержит хотя бы одно разрешенное неизвестное (уравнения с разрешенными неизвестными всегда можно записать перед уравнениями, не имеющими разрешенных неизвестных). Если после k-го шага система содержит ровно k нетривиальных уравнений, то процесс решения останавливается. Если же система содержит более чем k нетривиальных уравнений, то необходимо выполнить (k + 1)-й шаг и т.д.

Не более, чем через m шагов (m — число уравнений в исходной системе) мы или убедимся, что исходная СЛУ несовместна, или получим СЛУ, каждое уравнение которой содержит хотя бы одно разрешенное неизвестное, т.е. получим разрешенную систему, равносильную исходной системе.

При этом число сделанных при решении шагов не больше числа уравнений в исходной системе ($k \leqslant m$). Так как число уравнений в разрешенной системе не превосходит числа неизвестных этой системы, то число шагов, сделанных при решении СЛУ (1), не превосходит числа неизвестных ($k \leqslant n$).

Таким образом:

• СЛУ (1) является *несовместной*, если на каком-то шаге мы получим систему, содержащую противоречивые уравнения. В противном случае СЛУ (1) является *совместной*;

• совместная СЛУ (1) будет *определенной*, если при ее решении будет сделано ровно n шагов ($k = n$), и *неопределенной*, если количество выполненных шагов меньше числа неизвестных ($k < n$).

Замечание. Число общих решений данной СЛУ с m уравнениями и n неизвестными совпадает с числом сочетаний из n по k, т.е. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где k — число уравнений в любом общем решении данной СЛУ.

Определение. СЛУ с нулевыми свободными членами, т.е. $B = \Theta$, называется *однородной.*

Следствие. Система $AX = \Theta$ (*) однородных линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных ($m < n$), всегда имеет ненулевое решение.

► Любая система однородных линейных уравнений совместна, так как обладает нулевым решением — $\Theta = (0, ..., 0)$, причем число шагов, сделанных при решении такой системы методом Жордана—Гаусса, не больше числа уравнений в системе ($k \leqslant m$). Так как по условию число уравнений меньше числа неизвестных в системе ($m < n$), то ($k < n$) и система (*) является неопределенной, т.е. имеет более одного решения, в том числе и ненулевое. ◄

Пример. Решить данную систему уравнений методом Жордана—Гаусса. Найти два различных общих решения и соответствующие им базисные решения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

► Вычисления оформлены в виде таблиц. Разрешающие элементы выделены.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7

В этой таблице помещены векторы условий и свободные члены исходной системы. Результаты первого преобразования Жордана с разрешающим элементом $a_{11} = 1$ приведены в следующей таблице.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	3	4	5
0	**–1**	–2	–3	–4
0	–2	–4	–6	–8

Результат второго преобразования Жордана с разрешающим элементом $a_{22} = -1$ приведены ниже.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	**–1**	–2	–3
0	1	2	3	4
0	0	0	0	0

В этой таблице третье уравнение оказалось тривиальным, а в остальных уравнениях имеется по одной разрешенной неизвестной x_1, x_2. Следовательно, здесь получено общее решение, которое можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Приравниваем свободные переменные x_3, x_4 к нулю ($x_3 = x_4 = 0$), получаем базисное решение $X_b' = (-3, 4, 0, 0)$.

Для того чтобы найти второе общее и соответствующее ему базисное решение, в разрешенной системе выбираем отличный от нуля разрешающий элемент, например $a_{13} = -1$ и проводим преобразование Жордана. Получаем новое общее решение, которому соответствует таблица

x_1	x_2	x_3	x_4	b
–1	0	1	–2	3
2	1	0	–1	–2

с разрешенными неизвестными x_2 и x_3

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$$

и соответствующее ему базисное решение $X_b'' = (0, -2, 3, 0)$. ◄

Вопросы и задания

1. Напишите СЛУ в матричной и векторной формах.
2. Может ли некоторое число быть решением СЛУ с числом неизвестных более одного?
3. Когда несовместная СЛУ является определенной?
4. В каком случае две СЛУ являются равносильными?
5. Что общего и чем отличаются тривиальное и противоречивое уравнения?
6. Что утверждает теорема о СЛУ с тривиальным уравнением?
7. Разрешенная неизвестная и разрешающий элемент — это одно и то же понятие?
8. Как называют СЛУ, в каждом уравнении которой имеется хотя бы одна разрешенная неизвестная?
9. Что утверждает теорема о свободных неизвестных?

10. Докажите существование решения у разрешенной СЛУ, если свободным неизвестным придать определенные значения.

11. Докажите существование единственного решения у разрешенной СЛУ, если свободным неизвестным придать определенные значения.

12. При каких условиях разрешенная СЛУ является определенной и при каких неопределенной?

13. Перечислите преобразования, переводящие СЛУ в равносильную СЛУ.

14. Докажите, что СЛУ равносильна этой же СЛУ при замене в ней некоторого уравнения суммой этого уравнения с другим уравнением.

15. Что представляет собой Жорданово преобразование СЛУ?

16. Чем отличается базисное решение СЛУ от других частных решений той же СЛУ?

17. На какие особенности СЛУ необходимо обращать внимание на каждом шаге решения ее методом Жордана — Гаусса?

18. В каких случаях прекращается процесс решения СЛУ методом Жордана — Гаусса?

19. Если k — число шагов, проделанных при решении СЛУ с m уравнениями методом Жордана — Гаусса, то какие из соотношений: $m < k$, $m = k$, $m > k$ невозможны?

20. Если k — число шагов, проделанных при решении определенной СЛУ с n переменными методом Жордана — Гаусса, то какие из соотношений: $n < k$, $n = k$, $n > k$ невозможны?

21. Укажите наибольшее число возможных общих решений СЛУ с m уравнениями и n переменными?

22. Если однородная СЛУ с m уравнениями и n переменными имеет ненулевое решение, то какие из соотношений: $n < m$, $n = m$, $n > m$ невозможны?

Задачи для самостоятельного решения

1. Акции двух корпораций конкурируют на рынке. Зависимость спроса на акции первой корпорации x_1' и на акции второй корпорации x_2' от цены p_1', p_2' на эти акции выражается уравнениями:

$$\begin{cases} x_1' = 17 - 2p_1' + 0{,}5p_2', \\ x_2' = 20 - 3p_2' + 0{,}5p_1', \end{cases}$$

а зависимость предложения этих акций x_1'', x_2'' и цен на них выражается уравнениями:

$$\begin{cases} p_1'' = 2 + x_1'' + (1/3)x_2'', \\ p_2'' = 2 + 0{,}5x_2'' + 0{,}25x_1''. \end{cases}$$

Рыночное равновесие представляет собой равенство спроса и предложения. Найдите равновесные величины x_1', x_2', x_1'', x_2'', p_1', p_2', p_1'', p_2''.

2. Гонорар в 200 000 руб., полученный за опубликованную книгу, автор решил положить на счет в банке. При этом часть гонорара автор положил на один год под 6% годовых, вторую часть — на 3 года под 8% годовых, а остаток, вдвое превосходящий сумму, вложенную на один год, — на 5 лет под 10% годовых. Определите величину каждого вклада, если банк начислял сложные проценты и суммарная прибыль от всех вложений составила 7 699 892 руб.

3. Решить СЛУ методом Жордана—Гаусса. Выписать базисное решение и не равное ему частное решение.

$$1)\ \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 = 14, \\ 2x_1 + 12x_2 - 3x_3 + x_4 = 16, \\ 3x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 22. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 13x_4 + 5x_5 = 11. \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 13, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 8, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 11x_5 = 5. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -5, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 6. \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 5, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} 70x_1 + 42x_2 + 35x_3 + 42x_4 + 77x_5 = 259, \\ 38x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 44x_5 = 136, \\ 23x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 13x_4 + 24x_5 = 87. \end{cases}$$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 87. \end{cases}$

4. Найти хотя бы одну матрицу, перестановочную с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Методом Жордана — Гаусса найти матрицы, обратные к матрицам:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу C, если $AC = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

7. Платеж $C_i(t)$, обещанный через t лет ($t = 1, 2, ..., 5$) по облигации B_i с биржевой ценой P_i, номинальной стоимостью A_i, годовой ставкой купона f_i и сроком погашения n_i (i =1, 2, ..., 5), приведены в таблице.

Параметр	Облигация B_i					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
n_i, год	5	4	3	2	1	5
P_i, руб.	118,42	103,47	110,69	111,00	102,83	121,07
A_i, руб.	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
f_i, %	8	7	10	12	9	11
$C_i(1)$, руб.	8,00	7,00	10,00	12,00	109,00	11,00
$C_i(2)$, руб.	8,00	7,00	10,00	112,00	0	11,00
$C_i(3)$, руб.	8,00	7,00	110,00	0	0	11,00
$C_i(4)$, руб.	8,00	107,00	0	0	0	11,00
$C_i(5)$, руб.	108,00	0	0	0	0	111,00

Необходимо облигацию B_6 заменить эквивалентным (арбитражным) портфелем из облигаций B_1—B_5 с теми же платежами от портфеля, что и по облигации B_6. Провести сравнение стоимости облигации B_6 и стоимости сформированного арбитражного портфеля.

Для решения поставленной задачи введите вектор

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

где x_i — доля облигации i-го вида в арбитражном портфеле, решите систему линейных уравнений $CX^{\mathrm{T}} = C_0^{\mathrm{T}}$, где матрица $C = \begin{pmatrix} C_1(1) & ... & C_5(1) \\ ... & ... & ... \\ C_1(5) & ... & C_5(5) \end{pmatrix}$, а $C_0 = (C_6(1), ..., C_6(5))$. Затем сравните стоимость облигации B_6

и стоимость $P_A = PX^T$ арбитражного портфеля, где $P = (P_1, ..., P_5)$ — вектор цен облигаций портфеля.

8. Для изготовления трех видов изделий предприятие использует сырье трех видов A, B, C в ограниченном объеме. Определить количества изготавливаемых изделий. Исходные данные приведены в нижеследующих таблицах.

Вид сырья	Нормы расхода на изделие, кг			Запасы сырья, кг
	1	2	3	
A	2	3	5	2300
B	2	2	3	1500
C	1	2	4	1700

Вид сырья	Нормы расхода на изделие, кг			Запасы сырья, кг
	1	2	3	
A	1	2	1	1600
B	5	3	1	2800
C	3	1	2	2200

9. Предприятие производит продукцию тремя технологическими способами, используя три вида ресурсов. Запасы ресурсов и затраты каждого вида ресурса за 1 ч работы при использовании каждой технологии приведены в нижеследующих таблицах. Найти, сколько времени работает предприятие по каждой технологии.

Вид ресурса	Нормы расхода ресурса в час по технологии			Запасы ресурса
	1	2	3	
A	2	2	1	1000
B	1	3	2	1100
C	4	6	3	2500

Вид ресурса	Нормы расхода ресурса в час по технологии			Запасы ресурса
	1	2	3	
A	5	5	3	240
B	5	7	4	310
C	2	3	3	170

Глава 2
СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

В результате изучения материала данной главы студент должен: ***знать*** определения линейно зависимых и линейно независимых систем векторов, базис и ранг их; ***уметь*** обосновывать свойства систем векторов и единственность разложения векторов системы по базису ее; ***владеть*** методом Жордана — Гаусса для отыскания базиса системы векторов.

Определение. n-мерным вектором (матрицей строкой или матрицей столбцом) называют упорядоченную систему из n действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и обозначают

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n),$$

где n называют *размерностью вектора*.

Определение. Совокупность всевозможных n-мерных векторов после введения операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число называют n-мерным векторным пространством.

При сложении векторов суммируют соответствующие координаты их, а при умножении вектора на данное число каждую координату вектора умножают на данное число. Операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число будут рассмотрены в главе «Матрицы и линейные операторы».

Скалярное произведение этих векторов можно использовать для нахождения длины вектора по формуле

$$|A| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2},$$

где $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

После введения операции скалярное произведение векторное пространство становится *евклидовым пространством* (см. Приложение В).

Пусть даны n векторов размерности m, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Система m-мерных векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *линейно зависимой*, если система линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = \Theta \qquad (1)$$

имеет ненулевые решения, если же система (1) не имеет ненулевых решений, то данная система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *линейно независимой*.

Замечание. Существование ненулевого решения у системы линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = \Theta$ равносильно существованию такого ненулевого вектора $K = (k_1, k_2, \dots, k_n) \neq \Theta$, что выполняется линейное соотношение

$$A_1k_1 + A_2k_2 + \dots + A_nk_n = \Theta. \qquad (2)$$

С другой стороны, отсутствие ненулевого решения системы линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = \Theta$ равносильно тому, что из всякого соотношения вида $A_1k_1 + A_2k_2 + \dots + A_nk_n = \Theta$, следует, что $K = \Theta$. Поэтому можно сформулировать иначе определение линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение 2. Система m-мерных векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *линейно зависимой*, если существует такой ненулевой вектор $K = (k_1, k_2, \dots, k_n) \neq \Theta$, что выполняется линейное соотношение (2). Если же из всякого соотношения вида (2) следует, что $K = \Theta$, то система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *линейно независимой*.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Система единичных векторов линейно независима.

► Запишем систему линейных уравнений

$$E_1x_1 + E_2x_2 + \dots + E_nx_n = \Theta,$$

матрица условий которой составлена из единичных векторов.

E_1	E_2	E_3	...	E_n	B
1	0	0	...	0	0
0	1	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...
0	0	0	...	1	0

Из таблицы видно, что эта СЛУ имеет единственное нулевое решение, следовательно, по определению система единичных векторов является линейно независимой. ◀

2. Система m-мерных векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ является линейно зависимой, если число векторов превышает размерность их, т.е. $n > m$.

▶ Так как система линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \Theta$$

содержит m уравнений и n неизвестных, а по условию $n > m$, то по следствию из метода Гаусса система имеет ненулевые решения и, следовательно, по определению 1 система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ является линейно зависимой. ◀

3. Система, состоящая из одного ненулевого вектора, является линейно независимой.

▶ Пусть вектор $A \neq \Theta$. Тогда из соотношения $Ak = \Theta$ следует, что $k = 0$ и по определению 2 система, состоящая из одного ненулевого вектора, является линейно независимой. ◀

4. Система векторов $\Theta, A_1, A_2, ..., A_n$ является линейно зависимой при любых векторах $A_1, A_2, ..., A_n$.

▶ Так как соотношение $\Theta \cdot 1 + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + ... + A_n \cdot 0 = \Theta$ выполняется при $K = (1, 0, 0, ..., 0) \neq \Theta$, то по определению система векторов $\Theta, A_1, A_2, ..., A_n$ является линейно зависимой. ◀

5. Любые три трехмерные ненулевые векторы A_1, A_2, A_3, не лежащие в одной плоскости, образуют линейно независимую систему векторов.

▶ Предположим противное, т.е. данная система векторов A_1, A_2, A_3 является линейно зависимой. Тогда по определению найдется такой вектор $K = (k_1, k_2, k_3) \neq \Theta$, для которого будет выполняться соотношение $A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 = \Theta$. Пусть $k_1 \neq 0$. Тогда вектор A_1 можно представить в виде диагонали $A_1 = A_2(-k_2/k_1) + A_3(-k_3/k_1)$ параллелограмма, построенного на векторах $A_2(-k_2/k_1)$ и $A_3(-k_3/k_1)$. Откуда следует, что векторы A_1, A_2, A_3 лежат в одной плоскости. Это противоречит условию. Поэтому предположение о линейной зависимости данных векторов не является верным. Следовательно, данная система векторов линейно независима. ◀

Свойства системы векторов

1. Из определения линейной зависимости векторов следует, что любая система векторов либо линейно зависима, либо линейно независима.

2. Если часть данной системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ линейно зависима, то и вся данная система векторов линейно зависима.

► Пусть $A_1, A_2, ..., A_l$ — линейно зависимая часть системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, где $l <$ n. По определению найдется такой вектор $K = (k_1, k_2, ..., k_l) \neq \Theta$, что будет выполняться соотношение $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_lx_l = \Theta$. Тогда соотношение вида

$$A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_lk_l + A_{l+1}k_{l+1} + ... + A_nk_n = \Theta$$

будет выполняться при $K = (k_1, k_2, ..., k_l, 0, ..., 0) \neq \Theta$. Следовательно, по определению 2 вся система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ является линейно зависимой. ◄

3. Если данная система векторов линейно независима, то и любая ее часть линейно независима.

► От противного. Пусть часть $A_1, A_2, ..., A_k$ данной системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, где $k < n$, является линейно зависимой. Тогда из свойства 2 следует, что вся данная система векторов линейно зависима. Это противоречит условию. Следовательно, предположение неверно, а верно то, что любая часть линейно независимой системы векторов является также линейно независимой. ◄

4. Если система векторов $A_1, A_2, ..., A_n, B$ является линейно зависимой, а ее часть $A_1, A_2, ..., A_n$ — линейно независима, то вектор B линейно выражается через векторы $A_1, A_2, ..., A_n$.

► Система векторов $A_1, A_2, ..., A_n, B$ является линейно зависимой. Тогда по определению найдется такой вектор

$$K = (k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}) \neq \Theta,$$

что выполняется соотношение $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n + Bk_{n+1} = \Theta$. Покажем, что $k_{n+1} \neq 0$. Если бы $k_{n+1} = 0$, то $Bk_{n+1} = \Theta$. Тогда $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = \Theta$, а так как система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ по условию линейно независима, то по определению 2 $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$, а следовательно, вектор $K = \Theta$, что противоречит тому, что $K = (k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}) \neq \Theta$. Следовательно, $k_{n+1} \neq 0$. Тогда можно записать $B = A_1(-k_1/k_{n+1}) + A_2(-k_2/k_{n+1}) + ... + A_n(-k_n/k_{n+1})$. ◄

Базисы системы векторов

Определение. *Базисом данной системы векторов* $A_1, A_2, ..., A_n$ называется такая ее часть $B_1, B_2, ..., B_r$, в которой каждый из векторов есть один из векторов данной системы и которая удовлетворяет следующим условиям.

1. $B_1, B_2, ..., B_r$ являются линейно независимой системой векторов.

2. Каждый вектор A_j ($j = 1, 2, ..., n$) данной системы векторов линейно выражается через векторы $B_1, B_2, ..., B_r$, т.е.,

$$A_j = B_1k'_{1j} + B_2k'_{2j} + ... + B_rk'_{rj}. \quad (3)$$

Замечание. Любой вектор B_j ($j = 1, 2, ..., r$) также линейно выражается через векторы $B_1, B_2, ..., B_r$, например,

$$B_2 = B_10 + B_21 + B_30 + ... + B_r0.$$

Пример. Дана система векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что система векторов A_1, A_2, A_3 является базисом для данной системы.

► Так как векторы A_1, A_2, A_3 образуют единичную матрицу, то они линейно независимы (см. случай 1). Каждый вектор A_j ($j = 1, 2, ..., 5$) линейно выражается через векторы A_1, A_2, A_3:

$$A_4 = A_13 + A_22 + A_35; \quad A_5 = A_10 + A_2(-3) + A_34;$$
$$A_1 = A_11 + A_20 + A_30.$$

Таким образом, выполняются оба условия определения базиса, поэтому векторы A_1, A_2, A_3 являются базисом данной системы векторов. ◄

Теорема. Коэффициенты $k_{1j}, k_{2j}, ..., k_{rj}$ в разложении (3) вектора A_j по векторам базиса определены однозначно.

► Предположим, что существует еще одно разложение вектора A_j по векторам базиса, а именно,

$$A_j = B_1k'_{1j} + B_2k'_{2j} + ... + B_rk'_{rj}. \quad (4)$$

Вычтем соотношение (4) из соотношения (3), получим

$$\Theta = B_1(k_{1j} - k'_{1j}) + B_2(k_{2j} - k'_{2j}) + ... + B_r(k_{rj} - k'_{rj}).$$

Так как векторы $B_1, B_2, ..., B_r$ линейно независимы, то по определению 2 $k_{1j} - k'_{1j} = 0, k_{2j} - k'_{2j} = 0, ..., k_{rj} - k'_{rj} = 0 \Leftrightarrow k_{1j} = k'_{1j}, k_{2j} = k'_{2j}, ..., k_{rj} = k'_{rj}$, т.е. разложение по векторам базиса единственно. ◄

Определение. Линейно независимая часть $B_1, B_2, ..., B_m$ данной системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ называется *максимально линейно независимой частью* ($m \leqslant n$), если после добавления к этой части любого вектора данной системы, не входящего в $B_1, B_2, ..., B_m$, получается линейно зависимая часть данной системы векторов.

Теорема. Любая линейно независимая часть $C_1, C_2, ..., C_k$ данной системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ может быть дополнена до базиса этой системы.

► Если $C_1, C_2, ..., C_k$ не является максимально линейно независимой частью системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, то найдется такой вектор $C_{k+1} \in (A_1, A_2, ..., A_n)/(C_1, C_2, ..., C_k)$, что система векторов $C_1, C_2, ..., C_k, C_{k+1}$ будет линейно независимой частью системы $A_1, A_2, ..., A_n$.

Если и система $C_1, C_2, ..., C_k, C_{k+1}$ не является максимально линейно независимой частью системы $A_1, A_2, ..., A_n$, то найдется такой вектор $C_{k+2} \in (A_1, A_2, ..., A_n)/(C_1, C_2, ..., C_k, C_{k+1})$, что система векторов $C_1, C_2, ..., C_k, C_{k+1}, C_{k+2}$ будет линейно независимой частью системы $A_1, A_2, ..., A_n$ и т.д.

Через l таких шагов получим максимально линейно независимую часть $C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{k+l}$ системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$. Причем полученная система $C_1, C_2, ..., C_{k+l}$ удовлетворяет условиям определения базиса, т.к. она линейно независима. К тому же, если $A_j \notin (C_1, C_2, ..., C_{k+l})$, то из определения максимальной линейной независимости следует, что система векторов $C_1, C_2, ..., C_{k+l}, A_j$ линейно зависима. Тогда по четвертому свойству найдется такой вектор $K \neq \Theta$, что будет выполняться соотношение

$$C_1k_1 + C_2k_2 + ... + C_{k+l}k_{k+l} = A_j,$$

т.е. любой вектор системы $A_1, A_2, ..., A_n$ линейно выражается через векторы $C_1, C_2, ..., C_{k+l}$. Следовательно векторы $C_1, C_2, ..., C_{k+l}$ образуют базис системы $A_1, A_2, ..., A_n$. ◄

Следствие. *Если система векторов содержит хотя бы один ненулевой вектор, то эта система имеет базис.*

► Пусть $A_1 \neq \Theta$, тогда часть данной системы $A_1, A_2, ..., A_n$, состоящая из одного вектора A_1, будет линейно независима. По доказанной теореме эту линейно независимую часть можно дополнить до базиса данной системы. ◄

Замечания

1. Система векторов может иметь несколько различных базисов. Например, в рассмотренном выше примере вектор $A_4 \neq \Theta$. Следовательно, его можно дополнить до базиса, который не будет совпадать с базисом A_1, A_2, A_3.

2. Любая максимально линейно независимая часть системы векторов является базисом этой системы.

Возникает вопрос о количестве векторов в каждом базисе данной системы векторов. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Все базисы данной системы векторов состоят из *одного и того же числа* векторов.

Определение. Число векторов в любом базисе данной системы векторов называют *рангом* этой системы векторов. Ранг нулевой матрицы по определению равен нулю.

Замечание. Ранг матрицы равен рангу системы векторов, являющихся столбцами данной матрицы.

Определение. Данная система n-мерных линейно независимых векторов называется *базисом n-мерного векторного пространства*, если каждый вектор этого пространства линейно выражается через векторы данной системы.

Например, одним из базисов n-мерного векторного пространства является система из n единичных векторов $E_1, E_2, ..., E_n$. Следовательно, любой другой базис этого пространства состоит также из n векторов.

Определение. *Размерностью n-мерного векторного пространства* называют число векторов в его базисе.

Для отыскания базиса системы векторов используется утверждение следующей теоремы.

Теорема. Пусть дана СЛУ:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \Theta$$

и некоторое ее общее решение:

$$E_1x_1 + E_2x_2 + ... + E_rx_r + A'_{r+1}x_{r+1} + ... + A'_nx_n = \Theta.$$

Тогда векторы коэффициентов при неизвестных в данной СЛУ, соответствующие набору разрешенных неизвестных данного общего решения СЛУ, образуют базис системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$.

Таким образом, чтобы найти базис системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, выписываем систему однородных линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \Theta$. Находим общее решение и выписываем векторы из системы $A_1, A_2, ..., A_n$, соответствующие набору разрешенных неизвестных в общем решении.

Пример. Найти базис системы векторов: $A_1 = (5, 2, -3, 1)$, $A_2 = (4, 1, -2, 3)$, $A_3 = (1, 1, -1, -2)$, $A_4 = (3, 4, -1, 2)$.

► Выпишем СЛУ в виде таблицы и найдем ее общее решение.

A_1	A_2	A_3	A_4	Θ
5	4	1	3	0
2	1	1	4	0
–3	–2	–1	–1	0
1	3	–2	2	0