



МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В. В. Джамай, Е. А. Самойлов,
А. И. Станкевич, Т. Ю. Чуркина**

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА
2-е издание, исправленное и дополненное

Под редакцией В. В. Джамая

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям высшего профессионального образования в области техники и технологии

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ■ Юрайт ■ 2015

УДК 621
ББК 34.41я73
Д40

Авторы:

Джамай Виктор Валентинович — доцент кафедры машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), кандидат технических наук;

Самойлов Евгений Алексеевич — профессор кафедры машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), доктор технических наук;

Станкевич Александр Иванович — профессор, заведующий кафедрой машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), доктор технических наук, академик Российской и Международной инженерных академий;

Чуркина Татьяна Юрьевна — доцент кафедры машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), кандидат технических наук.

Рецензенты:

кафедра основ конструирования машин Московского энергетического института (технического университета) (заведующий кафедрой — доктор технических наук, профессор *Николаев В. П.*);

Зверьев Е. М. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Московского института коммунального хозяйства и строительства.

Джамай, В. В.

Д40 Прикладная механика : учебник для академического бакалавриата / В. В. Джамай, Е. А. Самойлов, А. И. Станкевич, Т. Ю. Чуркина ; под ред. В. В. Джамай. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 360 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-3862-3

В соответствии с типовой программой курса «Прикладная механика» в данном учебнике на высоком научно-методическом уровне изложены фундаментальные разделы следующих дисциплин: «Теория механизмов и машин», «Сопротивление материалов», «Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения» и «Детали машин».

По сравнению с ранее выходившими учебниками содержание и построение курса существенно обновлены в соответствии с современными требованиями, учтены отечественные и зарубежные достижения последних лет. Подробно излагаются теория и методы проектирования современных механизмов и приводов для новых отраслей промышленности. Приводятся сведения о современных конструкционных материалах. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Книга будет полезна также при выполнении курсовых проектов для самостоятельного изучения и контроля полученных знаний.

Для студентов немашиностроительных специальностей вузов.

УДК 621
ББК 34.41я73

ISBN 978-5-9916-3862-3

© Коллектив авторов, 2013
© ООО «Издательство Юрайт», 2015

Оглавление

Предисловие	7
Глава 1. Основы анализа механизмов	9
1.1. Структурный анализ механизмов	9
1.1.1. Основные термины и определения	9
1.1.2. Составные части механизма	10
1.1.3. Классификация кинематических пар	12
1.1.4. Кинематические цепи	15
1.1.5. Степень подвижности кинематической цепи	16
1.1.6. Принципы построения и структурная классификация механизмов	19
<i>Контрольные вопросы</i>	23
1.2. Кинематический анализ механизмов	24
1.2.1. Задачи и методы кинематического анализа	24
1.2.2. Кинематический анализ механизмов графическим методом	25
1.2.3. Кинематический анализ механизмов аналитическими методами	31
<i>Контрольные вопросы</i>	47
1.3. Динамический анализ механизмов	47
1.3.1. Цели и задачи динамического анализа	47
1.3.2. Силы, действующие на звенья механизма, и их классификация	48
1.3.3. Трение в механизмах	50
1.3.4. Уравнения движения механизмов с одной степенью свободы. Приведение сил и масс в плоских механизмах ...	55
1.3.5. Стадии (режимы) движения механизма	61
1.3.6. Коэффициент полезного действия механизма	62
<i>Контрольные вопросы</i>	64
Глава 2. Основы сопротивления материалов и расчетов на прочность	65
2.1. Основные положения	65
2.1.1. Гипотезы и допущения	65
2.1.2. Классификация сил	67
2.1.3. Внутренние силовые факторы (метод сечений)	68
2.1.4. Понятие о напряжении	69
<i>Контрольные вопросы</i>	71
2.2. Растяжение и сжатие	71
2.2.1. Определение нормальной силы	71
2.2.2. Нормальные напряжения и деформации	72

2.2.3. Напряженное состояние бруса при растяжении	74
2.2.4. Механические свойства материалов. Экспериментальные исследования при растяжении (сжатии)	76
2.2.5. Расчет на прочность. Запас прочности. Допускаемые напряжения	78
2.2.6. Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации при растяжении (сжатии)	80
<i>Контрольные вопросы</i>	81
2.3. Геометрические характеристики поперечных сечений	81
2.3.1. Статические моменты	81
2.3.2. Центр тяжести сечения	82
2.3.3. Моменты инерции	83
<i>Контрольные вопросы</i>	87
2.4. Сдвиг и кручение	87
2.4.1. Сдвиг	87
2.4.2. Кручение	90
<i>Контрольные вопросы</i>	96
2.5. Изгиб	96
2.5.1. Основные понятия	96
2.5.2. Дифференциальные и интегральные зависимости при изгибе	97
2.5.3. Нормальные напряжения при чистом изгибе балки ...	98
2.5.4. Расчет на прочность при изгибе	101
2.5.5. Касательные напряжения при изгибе	103
2.5.6. Перемещения при изгибе	107
<i>Контрольные вопросы</i>	109
2.6. Основы напряженно-деформированного состояния. Теории прочности	109
2.6.1. Основные положения	109
2.6.2. Классификация напряженных состояний	113
2.6.3. Главные напряжения и главные площадки в брус ...	114
2.6.4. Теории прочности	115
<i>Контрольные вопросы</i>	117
2.7. Устойчивость сжатых стержней	118
2.7.1. Устойчивость стержней, работающих в пределах упругости	118
2.7.2. Устойчивость стержней за пределами упругости	120
<i>Контрольные вопросы</i>	121
2.8. Прочность при переменных напряжениях	121
2.8.1. Явление усталости	121
2.8.2. Определение предела выносливости	122
2.8.3. Влияние различных факторов на сопротивление усталости	124
<i>Контрольные вопросы</i>	126

Глава 3. Основы взаимозаменяемости и точность изготовления деталей 127

3.1. Принципы построения единой системы допусков и посадок ...	127
3.1.1. Основные определения	128

3.1.2. Назначение допусков и посадок и их обозначение	133
<i>Контрольные вопросы</i>	137
3.2. Отклонения формы и расположения поверхностей. Шероховатость поверхностей	138
3.2.1. Отклонения и допуски формы	139
3.2.2. Отклонения и допуски расположения	140
3.2.3. Шероховатость поверхностей	145
<i>Контрольные вопросы</i>	149
Глава 4. Основы проектирования деталей и узлов механизмов ...	150
4.1. Конструкционные материалы	150
4.1.1. Стали	152
4.1.2. Чугуны	157
4.1.3. Легкие сплавы	157
4.1.4. Медные сплавы	160
4.1.5. Баббиты	161
4.1.6. Титановые сплавы	162
4.1.7. Никелевые сплавы	163
4.1.8. Сплавы тугоплавких металлов	164
4.1.9. Композиционные материалы	164
4.1.10. Неметаллические материалы	165
<i>Контрольные вопросы</i>	167
4.2. Классификация и требования, предъявляемые к деталям и узлам механизмов	167
4.2.1. Основные понятия	167
4.2.2. Классификация деталей механизмов	168
4.2.3. Требования к деталям машин	170
<i>Контрольные вопросы</i>	177
4.3. Механические передачи	178
4.3.1. Общие сведения	178
4.3.2. Привод	180
4.3.3. Динамика машин	189
<i>Контрольные вопросы</i>	194
4.4. зубчатые передачи	195
4.4.1. Цилиндрические зубчатые передачи	195
4.4.2. Конические зубчатые передачи	222
4.4.3. Планетарные передачи	228
4.4.4. Волновые передачи	232
<i>Контрольные вопросы</i>	238
4.5. Червячные передачи	238
<i>Контрольные вопросы</i>	245
4.6. Передачи винт-гайка	245
4.6.1. Передачи винт-гайка скольжения	246
4.6.2. Передачи винт-гайка качения	253
<i>Контрольные вопросы</i>	257
4.7. Передачи фрикционные и с гибкой связью	257
4.7.1. Фрикционные передачи	257
4.7.2. Ременные передачи	260
4.7.3. Цепные передачи	268
<i>Контрольные вопросы</i>	273

4.8. Валы и оси	274
<i>Контрольные вопросы</i>	285
4.9. Опоры валов и осей	285
4.9.1. Подшипники качения	286
4.9.2. Подшипники скольжения	299
<i>Контрольные вопросы</i>	305
4.10. Соединения	305
4.10.1. Основные понятия	305
4.10.2. Резьбовые соединения	306
4.10.3. Шпоночные соединения	314
4.10.4. Шлицевые соединения	317
4.10.5. Штифтовые соединения	321
4.10.6. Профильные соединения	323
4.10.7. Заклепочные соединения	324
4.10.8. Сварные соединения	329
4.10.9. Паяные соединения	336
4.10.10. Клеевые соединения	340
<i>Контрольные вопросы</i>	342
4.11. Муфты	343
4.11.1. Основные понятия	343
4.11.2. Неуправляемые муфты	344
4.11.3. Управляемые муфты	350
4.11.4. Самоуправляемые муфты	354
<i>Контрольные вопросы</i>	358
Литература	359

Предисловие

Содержание учебника соответствует учебной дисциплине «Механика», входящей в базовую (общепрофессиональную) часть профессионального цикла Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) для бакалавров в области авиационно-космической техники и общего машиностроения.

Учебник состоит из четырех глав. В первой главе «Основы анализа механизмов» даются основы структурного, кинематического и динамического анализов механизмов, вводятся основные термины и определения, дается структурная классификация механизмов; рассматриваются задачи и методы кинематического анализа; исследуются силы, действующие в механических системах, и выводятся уравнения движения.

Во второй главе «Основы сопротивления материалов и расчетов на прочность» рассматриваются виды деформаций тела под нагрузкой и методы оценки прочности элементов конструкций при различных нагружениях.

В третьей главе «Основы взаимозаменяемости и точность изготовления деталей» излагаются принципы построения единой системы допусков и посадок соединений гладких элементов деталей, виды допусков на отклонение формы и взаимного расположения поверхностей, способы оценки шероховатости поверхностей деталей.

В четвертой главе «Основы проектирования деталей и узлов механизмов» приводятся основы теории, расчета и конструирования деталей и узлов механизмов общего применения, используемых во всех отраслях машиностроения.

В результате изучения представленного материала бакалавр должен:

знать

- основные понятия, положения, законы и формулы представленных дисциплин;
- основные методы анализа, конструирования и расчета механизмов и машин;
- теоретические и практические подходы к разработке отдельных узлов и деталей механизмов;

- методы и принципы расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций;
- понятия и классификацию деталей и узлов механизмов общего применения;
- основные требования по работоспособности, технологичности, надежности и экономичности деталей и узлов механизмов;
- типовые конструкции деталей и узлов механизмов, области их применения;
- основные положения взаимозаменяемости и технических измерений в соответствии с Единой системой допусков и посадок;

уметь

- применять на практике полученные знания в области проектирования и конструирования механических систем;
- разрабатывать обобщенные варианты конструкций, анализировать их и находить компромиссные решения;
- разрабатывать и оформлять конструкторскую документацию, технические условия и технические описания;
- самостоятельно разрабатывать простейшие узлы передаточных механизмов с учетом требований работоспособности, технологичности, надежности, взаимозаменяемости, стандартизации и экономичности;
- выбирать расчетные схемы при оценке прочности реальных деталей и узлов механизмов;
- назначать материал деталей с учетом различных требований (механические свойства, стоимость, дефицитность и др.);

владеть

- понятийным аппаратом в области составляющих дисциплин курса «Прикладная механика»;
- техникой расчетов основных параметров и характеристик машин;
- методами расчета и конструирования деталей и типовых узлов передаточных механизмов;
- навыками оформления графической и текстовой конструкторской документации;
- общепрофессиональной информацией в области машиностроения.

Настоящее издание подготовлено коллективом авторов: глава 1 написана Т. Ю. Чуркиной; глава 2 — А. И. Станкевичем; глава 3, параграфы 4.1, 4.8—4.11 — В. В. Джамаем; параграфы 4.2—4.7 — Е. А. Самойловым.

Глава 1

ОСНОВЫ АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

После изучения главы 1 бакалавр должен:

знать

- основные понятия и положения дисциплины «Теория механизмов и машин»;
- структурную классификацию механизмов;
- основные методы структурного, кинематического и динамического анализа механизмов;

уметь

- применять полученные знания к анализу конкретных механизмов;
- определять степень подвижности кинематической цепи;
- строить планы скоростей и ускорений;
- составлять уравнение движения механизмов;

владеть

- понятийным аппаратом в области анализа механизмов.
-

1.1. Структурный анализ механизмов

1.1.1. Основные термины и определения

Широкий класс самых различных объектов охватывается понятием «машина». **Машина** — это устройство, выполняющее механическое движение для преобразования энергии, материалов, информации. Основными признаками машины являются выполнение данным устройством механического движения и совершение некоторой полезной работы. Причем из всех устройств, выполняющих механическое движение, к машинам относят только те, которые предназначены для преобразования энергии, материалов, информации. В зависимости от функционального назначения различают:

- *энергетические машины*, преобразующие любой вид энергии в энергию механическую и наоборот; к энергетическим машинам относятся двигатели внутреннего сгорания, электродвигатели, электрогенераторы, турбины и другие устройства;

- *технологические и транспортные машины*, которые преобразуют материалы, изменяют свойства, форму, состояние и положение объектов труда; к ним относятся металлообрабатывающие станки, прокатные станы, полиграфические, горные и текстильные машины, самолеты, автомобили, поезда, транспортеры, подъемники и т.п.;

- *информационные машины*, предназначенные для получения и преобразования информации; информационные машины выполняют контрольно-измерительные операции, функции регулирования и управления технологическими процессами.

Машины используются, как правило, в виде совокупности, системы машин. В классическом исполнении такая система состоит из машины-двигателя, передаточного механизма и рабочей машины. *Система нескольких взаимодействующих машин, связанных конструктивно, называется машинным агрегатом.*

При всем разнообразии машин и машинных агрегатов их объединяет то, что основу каждой машины составляет устройство или группа устройств, называемых механизмами.

Механизм — *это система тел, предназначенных для преобразования независимого движения одного или нескольких тел в требуемое движение остальных тел в соответствии с заданным функциональным назначением.* В преобразовании движения механизмов, кроме твердых тел, могут участвовать жидкие или газообразные среды. Механизмы представляют собой системы определенного движения. Определенность движения обеспечивается конструктивными средствами или средствами динамики. Существенным является то, что однотипные механизмы могут применяться в конструкциях самых разнообразных по назначению машин. В состав машины, кроме механизмов, могут входить дополнительные устройства, связанные, например, с их запуском, управлением или контролем.

1.1.2. Составные части механизма

Механизмы, независимо от функционального назначения и конструктивного исполнения, имеют общую структурную основу. Они состоят из звеньев — тел, участвующих в преобразовании движения. **Звено** — *деталь или группа жестко соединенных между собой деталей* (твердое звено). Кроме того, звенья могут быть гибкими (тросы, ремни, цепи), жидкими или газообразными.

Стойка — неподвижное звено или звено, условно принимаемое за неподвижное. Стойкой может быть станина, корпус, плата механизма и др. Относительно стойки оцениваются параметры движения механизма (перемещения, скорости и др.).

Из подвижных звеньев в зависимости от их расположения в цепи механизма выделяют входные и выходные звенья.

Входным звеном называется звено, которому сообщается движение от двигателя, **выходным** — звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Остальные подвижные звенья механизма называются **промежуточными**. Механизмы могут иметь несколько входных и выходных звеньев. Например, дифференциал автомобиля при одном входном звене, получающем движение от двигателя, имеет два выходных звена, соединенных с задними или передними колесами.

Входное звено является **ведущим** (движущим) звеном. Остальные подвижные звенья механизма, совершающие требуемые, однозначно определенные движения, называются **ведомыми**. Такая классификация используется при структурном исследовании механизма. При анализе же динамики механизмов разделение звеньев на ведущие и ведомые проводится по знаку элементарной работы сил, действующих на звено. У ведущих звеньев эта работа положительная, у ведомых — отрицательная или равна нулю. Поэтому входное звено, которое в структурном анализе по признаку действия является ведущим, при динамическом анализе на различных участках движения может быть и ведущим, и ведомым в зависимости от знака элементарной работы сил, действующих на звено.

Положения всех звеньев механизма относительно неподвижного звена (стойки) задаются обобщенными координатами — независимыми переменными, полностью и однозначно определяющими положение механизма. Число обобщенных координат соответствует числу степеней свободы механизма. На рис. 1.1 показана структурная схема плоского шарнирного четырехзвенника. Здесь 1—4 — звенья; A, B, C, D — кинематические пары. Положение механизма шарнирного четырехзвенника, имеющего одну степень свободы, полностью и однозначно определяется заданием одной координаты (угла по-

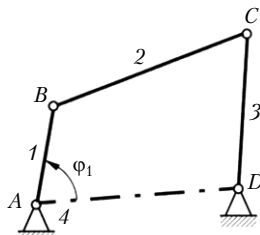


Рис. 1.1

ворота кривошипа 1), которую и можно принять за обобщенную координату.

За обобщенные координаты можно принять любые независимые координаты. *Звено, координаты которого выбираются в качестве обобщенных координат механизма, называется начальным звеном.* В большинстве случаев оно совпадает с входным звеном. Однако иногда для упрощения анализа за начальное звено удобнее принять промежуточное или даже выходное звено.

Звенья в механизмах соединяются между собой подвижно. *Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой.* Точки, линии, поверхности, по которым звенья соприкасаются, называют элементами кинематических пар.

1.1.3. Классификация кинематических пар

Одним из основных характерных свойств кинематических пар является количество простейших относительных движений, которых лишаются звенья механизма при соединении их в кинематические пары. Поясним это на примере. Известно, что свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Произвольное перемещение его в пространстве можно представить как результат сложения шести независимых движений: трех поступательных параллельно осям координат Ox , Oy , Oz и трех вращательных вокруг осей, параллельных этим осям (рис. 1.2). В зависимости от вида соединений звеньев механизма одно из них может совершать относительно другого одно, два, три, четыре или пять движений из шести, перечисленных выше. Следовательно, кинематические пары накладывают на относительные движения звеньев определенные ограничения, которые зависят от способа их соединения. Такие ограничения называются **связями**. Число S связей (геометрических), ограничивающих относительные движения звеньев, определяется равенством $S = 6 - W$, где W — число степеней свободы звеньев, образующих кинематическую пару.

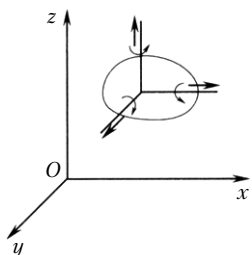
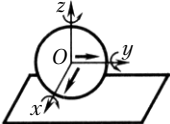
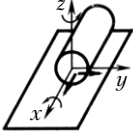
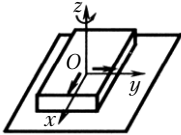
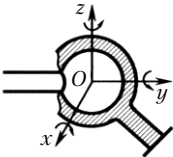
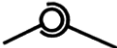
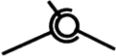


Рис. 1.2

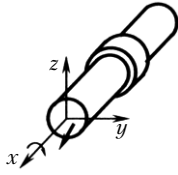
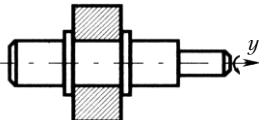
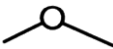
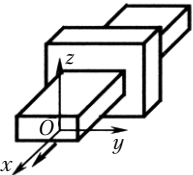
Академиком И. И. Артоболевским введена классификация кинематических пар, согласно которой все пары де-

лются на пять классов в зависимости от числа S . Разделение кинематических пар по классам представлено в табл. 1.1. Стрелками здесь отмечены возможные перемещения звеньев, которые сохраняются после образования пары. Для каждого класса указаны число степеней свободы W и число геометрических связей S . Приводятся условные изображения кинематических пар различных классов.

Таблица 1.1

Схематическое изображение кинематических пар	Условное изображение	S	W	Класс кинематической пары
Шар на плоскости 		1	5	1
Цилиндр на плоскости 		2	4	2
Призма на плоскости 		3	3	3
Сферическая 		3	3	3
Сферическая с пальцем 		4	2	4

Окончание табл. 1.1

Схематическое изображение кинематических пар	Условное изображение	S	W	Класс кинематической пары
Цилиндрическая 		4	2	4
Вращательная 		5	1	5
Поступательная 		5	1	5
Винтовая 		5	1	5

Кинематические пары разделяют на низшие и высшие, в зависимости от вида составляющих их элементов. К низшим кинематическим парам, элементами которых являются поверхности, относятся пары поступательная, вращательная, сферическая, винтовая и плоскостная (см. табл. 1.1). Точки и линии — элементы высших кинематических пар. К высшим кинематическим парам относятся пары «шар на плоскости» и «цилиндр на плоскости» (см. табл. 1.1). Преимущества низших пар — их способность передавать значительные усилия при меньшем износе в сравнении с высшими парами; для высших пар — возможность воспроизводить с их помощью достаточно сложные относительные движения.

1.1.4. Кинематические цепи

Кинематическая цепь — это связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Кинематические цепи можно разделить на плоские и пространственные, простые и сложные, замкнутые и незамкнутые (рис. 1.3). К *простым* относятся цепи, у которых каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1.3, а, б, г); к *сложным* — цепи, у которых имеются звенья, входящие в три и более кинематические пары (рис. 1.3, в); к *замкнутым* — цепи, у которых каждое звено входит по крайней мере в две кинематические пары (рис. 1.3, б — г), к *незамкнутым* — цепи, у которых есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рис. 1.3, а). Все подвижные звенья плоской кинематической цепи совершают движения, параллельные одной и той же неподвижной плоскости (см. рис. 1.1). В пространственных кинематических цепях точки звеньев описывают пространственные кривые либо движутся по плоским кривым, лежащим в пересекающихся плоскостях (рис. 1.4).

Введя понятие кинематической цепи, можно дать другое определение для механизмов, составленных только из твердых тел. **Механизм** называется кинематическая цепь, в которой при одном неподвижном звене (стойке) и заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущих) все остальные звенья (ведомые) совершают однозначно определенные движения. Механизмы могут быть образованы как замкнутыми, так и незамкнутыми кинематическими цепями. Примером незамкнутой кинематической цепи может служить механизм элементарного манипулятора (рис. 1.5).

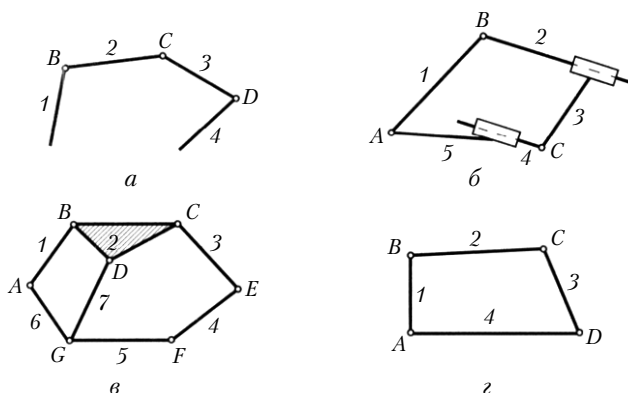


Рис. 1.3

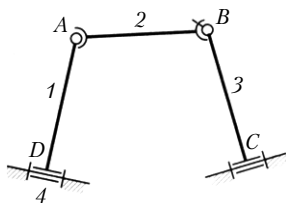


Рис. 1.4

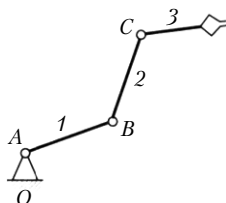


Рис. 1.5

Большинство механизмов образовано замкнутыми кинематическими цепями (см. рис. 1.1, 1.4).

При исследовании механизмов используются их условные изображения, составляются структурные, кинематические и другие схемы. Структурные схемы выполняются в виде чертежа, на котором с учетом условных обозначений, установленных ГОСТом, изображают звенья, кинематические пары, указывают стойку и ведущие звенья (см. рис. 1.1). Структурные схемы, выполненные в определенном масштабе, называются **кинематическими схемами**.

1.1.5. Степень подвижности кинематической цепи

Число степеней свободы кинематической цепи относительно одного из звеньев называют **степенью ее подвижности**. Для определения степени подвижности кинематической цепи W необходимо из общего числа степеней свободы всех ее подвижных звеньев вычесть число связей, накладываемых на относительное движение звеньев кинематическими парами, которые связывают звенья. Пусть n — число подвижных звеньев пространственной кинематической цепи; P_i — число кинематических пар i -го класса ($i = 1, \dots, 5$). Тогда $6n$ — общее число степеней свободы n звеньев цепи, если считать их не связанными между собой, а iP_i — общее число связей, наложенных на звенья механизма кинематическими парами i -го класса.

С помощью введенных обозначений степень подвижности кинематической цепи можно определить выражением

$$W = 6n - \sum_{i=1}^5 iP_i. \quad (1.1)$$

Развернув сумму в выражении (1.1), получим структурную формулу пространственной кинематической цепи общего вида (формулу Сомова — Малышева):

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) показывает, какому количеству звеньев кинематической цепи должно быть задано движение (т.е. сколько должно быть ведущих звеньев), чтобы движение остальных звеньев было однозначно определенным. Формулой можно пользоваться, если убрать дополнительные общие условия связи, которые накладывают ограничения на движение всех звеньев кинематической цепи. Например, для плоской кинематической цепи, у которой звенья движутся параллельно одной неподвижной плоскости, перпендикулярной осям вращательных пар, на них наложены три общие связи (см. рис. 1.1). Звенья такой цепи не могут перемещаться вдоль оси, перпендикулярной к неподвижной плоскости, и вращаться относительно двух осей, лежащих в этой плоскости. Число степеней свободы каждого звена уменьшается здесь на 3 — число общих связей. Общее число степеней свободы n звеньев цепи будет равно $(6 - 3)n$. Каждая кинематическая пара в этом случае накладывает на движение звеньев цепи на три ограничения меньше класса пары. Так, пары 5-го и 4-го классов накладывают на движение звеньев цепи соответственно две и одну связи, а кинематические пары 1, 2 и 3-го классов в рассматриваемой цепи не могут иметь места.

Для плоской кинематической цепи структурную формулу (1.2) перепишем в виде

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 \quad (1.3)$$

(формула Чебышева).

Кинематические пары 5-го класса в плоском механизме могут существовать в виде вращательной и поступательной пар (см. табл. 1.1).

Поскольку механизм представляет собой кинематическую цепь, то степень его подвижности определяется по формулам (1.2), (1.3) с учетом общих связей, наложенных на все звенья механизма. Степень подвижности механизма соответствует тому количеству независимых между собой координат (обобщенных координат), которое необходимо задать для однозначной определенности положений всех звеньев механизма. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника имеем (см. рис. 1.1)

$$n = 3; \quad P_5 = 4; \quad P_4 = 0.$$

Степень подвижности подсчитываем по формуле (1.3):

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

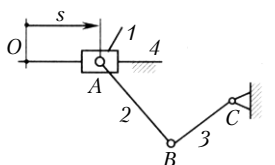


Рис. 1.6

Следовательно, данный механизм должен иметь одно ведущее звено и одну обобщенную координату. В качестве обобщенной координаты обычно выбирают угловую координату ведущего звена φ_1 .

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.6) параметры формулы (1.3) такие же, как и для механизма шарнирного четырехзвенника. Ведущее звено (ползун 1) движется прямолинейно, и за обобщенную координату принимается линейная координата S ползуна.

В механизмах с двумя степенями подвижности за обобщенные координаты выбираются координаты двух ведущих звеньев или одного ведущего звена, если это звено образует со стойкой кинематическую пару с двумя степенями свободы.

Формула (1.2) несправедлива для механизмов с избыточными (пассивными связями). **Избыточными связями в механизме называют повторяющиеся связи, которые дублируют ограничения, наложенные другими связями.** Избыточные связи можно удалить из механизма, сохранив при этом заданное число степеней свободы механизма. Если число избыточных связей обозначить q , то степень подвижности механизма с избыточными связями можно выразить соотношением

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 + q. \quad (1.4)$$

В плоском шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 1.1) $W = 1$, $n = 3$, $P_5 = 4$. Число избыточных связей находим по формуле (1.4):

$$q = W - 6n + 5P_5 = 1 - 18 + 20 = 3.$$

Устранение избыточных связей достигается изменением подвижностей некоторых кинематических пар. Например, если в плоском шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 1.1) вращательную пару B заменить на сферическую пару 3-го класса A , а вращательную пару C — на сферическую с пальцем пару 4-го класса B , то полученный таким образом механизм пространственного четырехзвенника (см. рис. 1.4) будет иметь $W = 1$, $n = 3$, $P_3 = P_4 = 1$, $P_5 = 2$. Тогда

$$q = W - 6n + 5P_5 + 4P_4 + 3P_3 = 1 - 18 + 10 + 4 + 3 = 0.$$

Таким образом, в механизме пространственного четырехзвенника избыточные связи отсутствуют.

Наличие избыточных связей в механизмах требует повышенной точности изготовления элементов кинематических пар во избежание дополнительных нагрузок на звенья механизма из-за их деформаций. В некоторых случаях избыточные связи вводят намеренно для повышения жесткости механизма. Например, в механизме сдвоенного параллелограмма (рис. 1.7) необходимо строгое соблюдение геометрических соотношений: $OA = BC$, $AB = OC$; если $OF = CG$, то $FG = OC$. Кроме того, требуется высокая точность изготовления механизма. Введение дополнительного звена FG не вносит новых геометрических связей. И хотя при формальном подсчете степени подвижности по формуле (1.3) получаем $W = 0$, фактическая степень подвижности механизма остается равной единице. Звено FG , введенное в механизм для увеличения его жесткости, во время работы обеспечивает сохранение контуру $OABC$ формы параллелограмма.

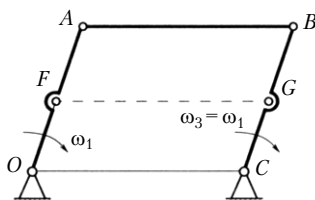


Рис. 1.7

1.1.6. Принципы построения и структурная классификация механизмов

Метод классификации плоских механизмов и принципы их построения были разработаны в начале XX в. русским ученым Л. В. Ассуром. Предложенный им метод позволяет проводить классификацию плоских механизмов, удовлетворяющих формуле Чебышева (1.3). Академик И. И. Артоболевский распространил классификацию Л. В. Ассура на пространственные механизмы. Практическое значение классификации заключалось в том, что она давала возможность устанавливать соответствие степени сложности механизма (его класса) методам его исследования и построения.

Построение механизма по Ассуру состоит в последовательном присоединении к ведущим звеньям и стойке особых кинематических цепей, называемых структурными группами или группами Ассура, без изменения степени подвижности механизма в целом. **Группа Ассура** — кинематическая цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым она присоединяется своими концевыми элементами и которая не распадается на более простые кинематические цепи с нулевой степенью подвижности.

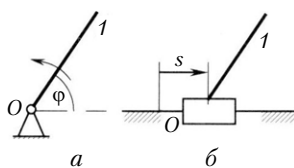


Рис. 1.8

Рассмотрим принцип построения механизмов методом наложения групп Ассура на примере плоского механизма с одной степенью свободы, у которого положение всех звеньев определяется заданием одной обобщенной координаты

(φ или s). Построение механизма начинается с объединения ведущего звена и стойки. Согласно классификации Ассура — Артоболевского полученный таким образом механизм называется **начальным механизмом 1-го класса** (рис. 1.8, а, б). Начальный механизм имеет одну степень подвижности. Более сложные механизмы образуются присоединением (наложением) к начальному механизму групп Ассура. Группы Ассура имеют лишь кинематические пары 5-го класса, поэтому, используя формулу (1.3), при $W = 0$ находим $3n - 2P_5 = 0$. Отсюда $P_5 = 3/2n$.

Таким образом, число звеньев в группе n должно быть четным, а количество кинематических пар P_5 — числом, кратным трем. Возможные сочетания количества звеньев и кинематических пар ($n = 2, 4, 6, \dots$; $P_5 = 3, 6, 9, \dots$) дают возможность получать различные по сложности строения структурные группы. Простейшая из них имеет $n = 2$; $P_5 = 3$ и называется **двухповодковой группой** (по числу звеньев — поводков) (рис. 1.9). Если один крайний элемент такой группы (элемент B на рис. 1.9, а) присоединить к ведущему звену 1, а другой, крайний элемент D — к стойке 2, то образуется механизм, называемый **плоским шарнирным четырехзвенником** (см. рис. 1.1).

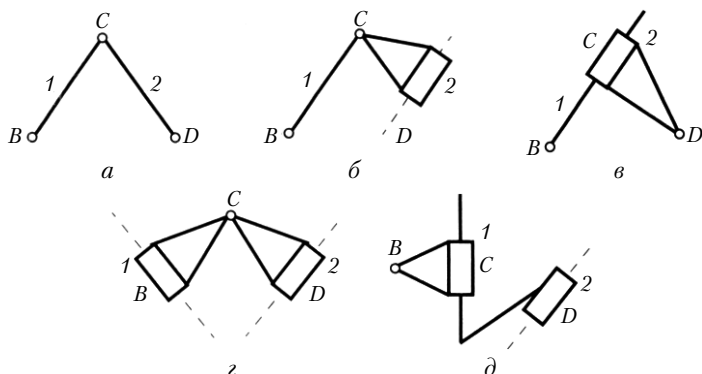


Рис. 1.9

Группы Ассура имеют внутренние и внешние кинематические пары. Внутренние пары соединяют между собой звенья группы, а внешними парами группа присоединяется к остальной кинематической цепи. Число внешних кинематических пар определяет порядок группы Ассура. Например, упоминавшаяся выше двухповодковая группа называется группой Ассура второго порядка.

Структурные группы, у которых $n = 2$; $P_5 = 3$, в зависимости от количества вращательных и поступательных кинематических пар и последовательности их расположения могут быть пяти различных видов (рис. 1.9, $a - d$). Четырехзвенные структурные группы, имеющие $n = 4$; $P_5 = 6$, могут быть трехповодковыми третьего порядка (рис. 1.10, a) и четырехзвенными второго порядка с подвижным четырехсторонним контуром (рис. 1.10, b). Отличительная особенность трехповодковой группы — наличие внутреннего базисного звена, входящего в три кинематические пары. Различные виды двух последних групп Ассура можно также получить путем замены вращательных кинематических пар поступательными. Структурные группы с числом звеньев более четырех встречаются в механизмах крайне редко.

И. И. Артоблезовский расширил и модифицировал классификацию Л. В. Ассура. По классификации И. И. Артоблезовского двухповодковая структурная группа условно относится к группам 2-го класса и имеет второй порядок. Класс группы выше второго определяется числом кинематических пар, входящих в замкнутый контур, который образован внутренними кинематическими парами. Поэтому трехповодковая группа, имеющая три внутренние кинематические пары и ба-

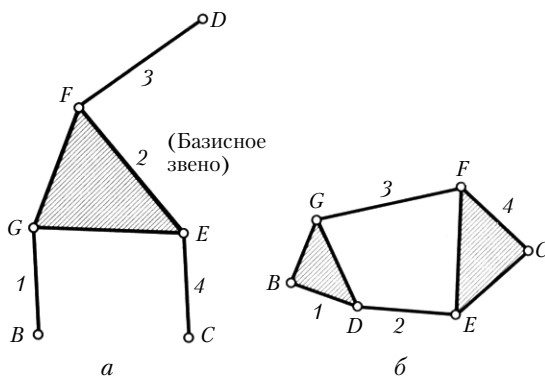


Рис. 1.10

зисное звено (см. рис. 1.10, *а*), относится к 3-му классу и имеет третий порядок (по числу внешних кинематических пар). Четырехзвенная группа, имеющая четыре внутренние кинематические пары (см. рис. 1.10, *б*), относится к 4-му классу и имеет второй порядок.

Структурный анализ механизмов (исследование структуры механизмов) предполагает:

- определение количества звеньев механизма, числа и класса его кинематических пар;
- определение степени подвижности механизма;
- разделение механизма на начальные механизмы и структурные группы;
- определение класса и порядка структурных групп.

Результатом структурного анализа является определение класса всего механизма, который соответствует наивысшему классу группы Ассура, входящей в состав механизма. Определение класса механизма, согласно классификации Ассура — Артоболевского, возможно, если в результате предварительного структурного анализа установлено выполнение следующих условий:

- степень подвижности механизма соответствует количеству ведущих звеньев;
- ведущие звенья входят в кинематические пары со стойкой;
- в механизме имеются только кинематические пары 5-го класса.

При наличии в плоском механизме кинематических пар 4-го класса структурный анализ проводится на заменяющем механизме [1].

Рекомендуется следующая последовательность отделения структурных групп из кинематической цепи механизма. Отделение групп начинается со звеньев, наиболее удаленных от ведущего звена. В первую очередь отделяются группы Ассура наиболее низкого класса. Следует иметь в виду, что после отделения каждой группы степень подвижности механизма должна оставаться неизменной, а каждое звено и кинематическая пара могут входить только в одну структурную группу. Разделение кинематической цепи механизма на группы Ассура ведется до тех пор, пока не останутся только начальные механизмы (ведущие звенья и стойка).

Поясним структурный анализ и классификацию механизмов по Ассуру — Артоболевскому на примере механизма, показанного на рис. 1.11. Механизм имеет пять подвижных

звеньев ($n = 5$) и семь кинематических пар 5-го класса ($P_5 = 7$). По формуле (1.3) определяем степень подвижности механизма

$$W = 3n - 2P_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Ведущее звено 1 со стойкой 6 образуют механизм 1-го класса. Ведомую кинематическую цепь можно разделить на две группы Ассура 2-го класса (выделены на рис. 1.11 контурными линиями), начиная с группы, которая состоит из звеньев 4, 5.

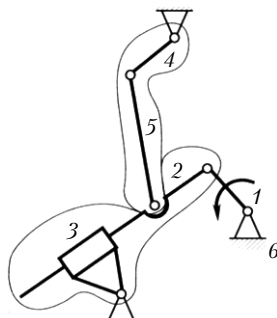


Рис. 1.11

Так как механизм имеет в своем составе только группы Ассура 2-го класса, то его следует отнести к механизмам 2-го класса.

Принципы построения механизмов по Ассуру — Артоблевскому удобно использовать как при структурном анализе, так и при структурном синтезе механизмов. Уже на этапе проектирования машин их закладываемая работоспособность и надежность во многом зависят от того, насколько правильно и рационально выбраны схема построения механизма и его структура.

Контрольные вопросы

1. Какие устройства называют машиной? Что представляет собой механизм? Какова взаимосвязь между ними?
2. Какие составные части можно выделить в структуре механизма?
3. На чем основана классификация кинематических пар, введенная академиком И. И. Артоблевским?
4. В чем заключается различие между низшими и высшими кинематическими парами?
5. Что представляет собой кинематическая цепь?
6. Как вычислить степень подвижности кинематической цепи общего вида?
7. В чем состоит особенность определения степени подвижности плоской кинематической цепи?
8. На чем основана структурная классификация механизмов по Ассуру — Артоблевскому?

1.2. Кинематический анализ механизмов

1.2.1. Задачи и методы кинематического анализа

Кинематический анализ состоит в определении параметров движения звеньев механизма по заданному движению ведущих звеньев без учета действующих сил.

Основными задачами кинематического анализа являются:

- определение положений звеньев механизма и построение траекторий отдельных точек;
- определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев;
- определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев.

При решении задач кинематического анализа должны быть заданы:

- кинематическая схема механизма, а следовательно, структура механизма и размеры его звеньев;
- закон движения ведущего звена в виде зависимости перемещения звена (линейного или углового) или точки на нем от времени или других параметров движения.

В связи с этим кинематическому анализу должно предшествовать исследование структуры механизма, при котором определяется, сколько, какого класса и в какой последовательности соединены структурные группы, образующие ведомую кинематическую цепь механизма. Задачи кинематического анализа могут быть решены графическими или аналитическими методами. Выбор метода определяется назначением расчета и требуемой точностью решения.

Графические методы основаны на геометрическом построении траекторий движения отдельных точек звеньев механизма, их скоростей и ускорений. Получаемые результаты дают наглядную картину движения звеньев механизма и его точек. Однако для этих методов характерны трудоемкие построения и малая точность. Графическими методами нельзя получить общее решение, так как необходимые построения выполняются для каждого конкретного положения механизма.

Аналитические методы отличаются большим разнообразием математических подходов. Они основаны на использовании методов аналитической геометрии, тензорно-матричных операций, векторного анализа и др. Аналитические методы обеспечивают высокую точность вычисления искомых параметров для каждого момента времени работы механизма. Однако в ряде случаев из-за сложности математических пре-

образований утрачивается наглядность картины изменения исследуемых параметров. В настоящее время преимущественно применяют аналитические методы. Тем не менее для предварительной оценки кинематических параметров механизма и контроля аналитических вычислений используют простейшие геометрические построения — планы положений, скоростей и ускорений.

1.2.2. Кинематический анализ механизмов графическим методом

Решение задач о положениях, скоростях и ускорениях графическим методом поясним на примере кинематического анализа механизма плоского шарнирного четырехзвенника (рис. 1.12, *a*). Механизм имеет одну степень подвижности и состоит из ведущего звена 1 (кривошипа) и стойки O , к которым присоединена одна группа Ассур 2-го класса, составленная из звеньев 2 (шатунa) и 3 (коромысла). За обобщенную координату выберем угол поворота кривошипа φ_1 .

Задача о положениях (см. рис. 1.12, *a*). Решить задачу о положениях, т.е. построить план положений, — значит графически изобразить кинематическую схему механизма для

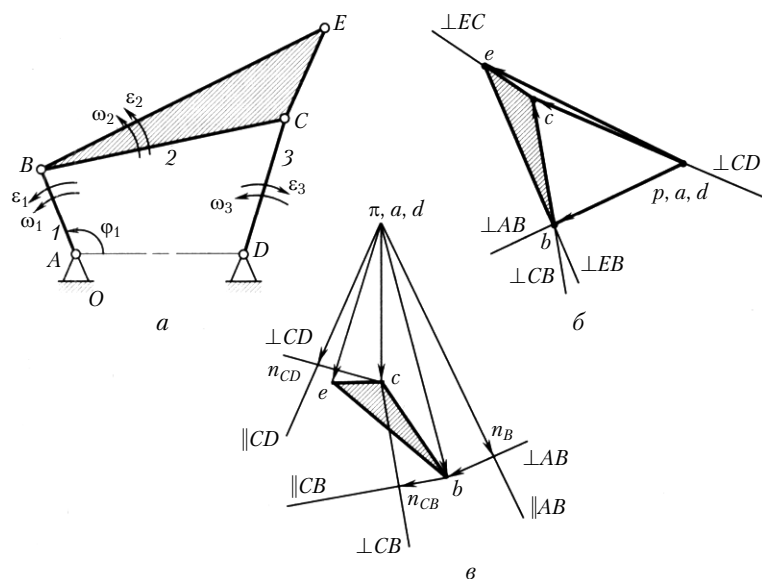


Рис. 1.12

заданного значения координаты φ_1 . Для построения схемы механизма выберем масштабный коэффициент (м/мм):

$$\mu_1 = \frac{l_{AB}}{AB},$$

где l_{AB} — длина звена 1, м; AB — отрезок, изображающий звено 1 на чертеже, мм.

Длины отрезков на чертеже, изображающих звенья механизма, представим в виде

$$BC = \frac{l_{BC}}{\mu_1}; \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_1}; \quad AD = \frac{l_{AD}}{\mu_1}; \quad BE = \frac{l_{BE}}{\mu_1}; \quad EC = \frac{l_{EC}}{\mu_1}.$$

Вычислив длины отрезков, простым геометрическим построением получим план положения механизма для данного значения угла φ_1 (см. рис. 1.12, а).

Задача о скоростях (рис. 1.12, б). Данную задачу решают методом построения плана скоростей. **Планом скоростей (ускорений)** называется фигура, составленная из векторов абсолютных скоростей (ускорений) точек звеньев, выходящих из одной точки p (п для плана ускорений), называемой полюсом плана скоростей (ускорений), и векторов относительных скоростей (ускорений), соединяющих концы векторов абсолютных скоростей (ускорений).

Сначала для заданного положения механизма (задано значение угла φ_1) с известными размерами его звеньев строится план положений. При заданной угловой скорости ведущего звена ω_1 требуется определить угловые скорости ω_2 , ω_3 звеньев 2, 3, а также скорости характерных точек B , C и E звеньев механизма (см. рис. 1.12, а).

Скорость точки B ведущего звена v_B (м/с) и масштабный коэффициент μ_v (мс⁻¹/мм) определяются выражениями

$$v_B = \omega_1 l_{AB}; \quad \mu_v = \frac{v_B}{(pb)}.$$

Здесь (pb) — длина отрезка, изображающего скорость v_B на плане скоростей (выбирается произвольно).

Для построения плана скоростей составляются два векторных уравнения скоростей на каждую группу Ассура 2-го класса, начиная с первой группы, присоединенной к ведущему звену. Скорости точек, принадлежащих внешним кинематическим парам группы, известны: $v_B = \omega_1 l_{AB}$, $v_D = 0$. Искомой является скорость точки C , принадлежащей внутренней кинематической паре группы, а следовательно, звеньям 2 и 3 одновременно.

Первое уравнение скоростей запишем, рассмотрев движение звена 2. Шатун 2 совершает плоскопараллельное движение, поэтому абсолютную скорость точки C можно представить суммой скоростей переносного и относительного движений. Переносным движением является поступательное движение звена 2 со скоростью точки B , а относительным — вращательное движение этого звена вокруг точки B . Используя теорему сложения скоростей, имеем

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \quad (1.5)$$

где $\vec{v}_{CB}$ — вектор скорости точки C во вращательном движении звена 2 относительно точки B .

По аналогии составим второе векторное уравнение скоростей для движения звена 3:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD}, \quad (1.6)$$

где $\vec{v}_{CD}$ — вектор скорости точки C во вращательном движении звена 3 относительно неподвижной точки D .

Приравняв правые части равенств (1.5) и (1.6), получим уравнение, которое непосредственно используется при построении плана скоростей:

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{CB} = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD}. \quad (1.7)$$

Для плоской задачи векторное уравнение равносильно двум скалярным уравнениям, из которых можно определить две неизвестные величины $\vec{v}_{CB}$ и $\vec{v}_{CD}$. Их находят построением векторных треугольников скоростей — плана скоростей.

Построение плана скоростей начинаем с выбора полюса: на плоскости чертежа отмечаем произвольную точку p (см. рис. 1.12, б). Из полюса p откладываем отрезок (pb) произвольной длины, направленный перпендикулярно звену AB в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB . Затем из точки b проводим линию действия вектора $\vec{v}_{CB}$, перпендикулярную звену CB , и выполняем построение векторного треугольника, соответствующего правой части уравнения (1.7). Так как $\vec{v}_D = 0$, конец вектора $\vec{v}_D$ (точка d на плане скоростей) совпадает с полюсом p . Из точки d проводим линию действия вектора $\vec{v}_{CD}$, направленную перпендикулярно звену CD . Пересечение построенных линий (точка c) определяет положение конца вектора скорости $\vec{v}_C$. Вектор скорости $\vec{v}_{CB}$ изображается на плане скоростей отрезком (cb).

При определении направлений векторов на плане скоростей руководствуемся следующими правилами. Вектор аб-

солютной скорости всегда направлен из полюса; вектор от-носительной скорости — к точке плана, соответствующей первой букве индекса в обозначении этой скорости. Таким образом, стрелку вектора $\vec{v}_{CB}$ на плане скоростей направляем из точки b в точку c . Вектор $\vec{v}_{CD} = \vec{v}_C$, изображаемый отрезком $(cd) = (cp)$, также направлен в точку c плана.

Учитывая, что точка A звена AB неподвижна, соответствующую точку a на плане совмещаем с полюсом p . На этом заканчивается построение плана скоростей механизма. Значения искомых скоростей $\vec{v}_{CB}$ и $\vec{v}_{CD}$ находятся путем замера длин отрезков (cb) и (cd) :

$$v_{CB} = \mu_v(cb); \quad v_{CD} = v_C = \mu_v(cd).$$

При определении угловых скоростей звеньев механизма используем полученные выше результаты. Модуль угловой скорости вращения шатуна (звена 2) подсчитываем по формуле

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{CB}}.$$

Для определения направления вращения шатуна со скоростью ω_2 перенесем вектор $\vec{v}_{CB}$ параллельно самому себе из плана скоростей в точку C механизма. Направление вектора $\vec{v}_{CB}$ показывает, что вращение шатуна будет направлено против хода часовой стрелки.

Аналогичные операции проводим при определении угловой скорости вращения звена 3:

$$\omega_3 = \frac{v_{CD}}{l_{CD}}.$$

Параллельный перенос вектора $\vec{v}_{CD}$ в точку C механизма позволяет установить, что вращение звена 3 с угловой скоростью ω_3 направлено, как и вращение шатуна 2, против хода часовой стрелки. На схеме механизма, изображенной на рис. 1.12, a , направления вращения звеньев указаны круговыми стрелками.

После построения плана скоростей и определения угловых скоростей звеньев механизма появляется возможность определения скорости любой точки механизма. Допустим, требуется найти скорость точки E шатуна 2 (см. рис. 1.12, a). Составляем два векторных уравнения, аналогичных уравнениям (1.5) и (1.6):

$$\vec{v}_E = \vec{v}_B + \vec{v}_{EB}; \quad (1.8)$$

$$\vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{v}_{EC}. \quad (1.9)$$

Направление векторов $\vec{v}_{EB}$ и $\vec{v}_{EC}$:

$$\vec{v}_{EB} \perp BE; \quad \vec{v}_{EC} \perp CE.$$

Объединим уравнения (1.8) и (1.9) в одно равенство:

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{EB} = \vec{v}_C + \vec{v}_{EC}.$$

Теперь можно определить абсолютную скорость $\vec{v}_E$, построив план скоростей. Из точки b плана проводим линию, перпендикулярную BE , а из точки c — линию, перпендикулярную CE . Точка e пересечения этих линий определяет положение конца вектора $\vec{v}_E$. Соединив точку e с полюсом p , получим отрезок (pe) , с помощью которого вычисляем значение скорости:

$$v_E = \mu_v(pe).$$

Обратим внимание на следующее свойство плана скоростей. Стороны Δbec плана скоростей и ΔBEC плана положений механизма взаимно перпендикулярны, а следовательно, эти треугольники подобны. Вершины треугольников сходственно расположены, т.е. обход контуров (bec) и (BEC) происходит в одном направлении, в данном случае по ходу часовой стрелки. Это свойство справедливо как для плана скоростей, так и для плана ускорений любых точек одного и того же звена механизма. Оно формулируется в виде **теоремы подобия**: *отрезки прямых, соединяющих концы векторов абсолютных скоростей (или ускорений) точек одного и того же звена на плане скоростей (или ускорений), и отрезки прямых, соединяющих соответствующие точки самого звена на плане положений механизма, образуют подобные и сходственно расположенные фигуры [12].*

С помощью этой теоремы можно найти скорость (или ускорение) любой точки звена путем построения подобных и сходственно расположенных фигур по известным скоростям двух точек этого звена.

Задача об ускорениях (рис. 1.12, в). Для определения ускорений точек звеньев механизма построим план ускорений. Построения проведем на примере того же шарнирного четырехзвенника при заданном значении обобщенной координаты φ_1 . Считаются известными угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 ведущего звена.

Как известно, ускорение любой точки звена, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, можно представить суммой

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^n,$$

где $\vec{a}^\tau$ и $\vec{a}^n$ — соответственно касательная (тангенциальная) и нормальная составляющие ускорения $\vec{a}$.

Ведущее звено (кривошип) четырехзвенника вращается вокруг точки A . Поэтому ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n, \quad (1.10)$$

где $\vec{a}_B^\tau = \varepsilon_1 l_{AB}$; $\vec{a}_B^n = \omega_1^2 l_{AB}$.

Нормальная составляющая $\vec{a}_B^n$ ускорения точки B направлена к центру вращения (к точке A) параллельно AB . Касательная составляющая $\vec{a}_B^\tau$ направлена перпендикулярно AB в сторону, совпадающую с направлением ускорения ε_1 .

На плане ускорений конец вектора нормальной составляющей ускорения точки обозначим буквой n с соответствующим точке индексом: n_B — конец вектора $\vec{a}_B^n$ на плане ускорений; n_{CB} — конец вектора $\vec{a}_{CB}^n$.

Зададимся отрезком (πn_B), изображающим нормальную составляющую ускорения точки B , и определим масштабный коэффициент плана ускорений (в $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}/\text{мм}$):

$$\mu_a = \frac{a_B^n}{(\pi n_B)}.$$

По аналогии с задачей о скоростях составим два векторных уравнения для ускорения точки C , принадлежащей звеньям 2 и 3:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{CB}^n; \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^\tau + \vec{a}_{CD}^n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{CB}^n = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^\tau + \vec{a}_{CD}^n. \quad (1.11)$$

В уравнении (1.11) $\vec{a}_D = 0$, а ускорения $\vec{a}_B^\tau$ и $\vec{a}_B^n$ уже определены по величине и направлению. Значения a_{CB}^n и a_{CD}^n вычисляем по формулам $a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{CB}$, $a_{CD}^n = \omega_2^2 l_{CD}$; отрезки, которые изображают эти ускорения на плане ускорений (см. рис. 1.12, в), — по формулам $(bn_{CB}) = a_{CB}^n/\mu_a$, $(\pi n_{CD}) = a_{CD}^n/\mu_a$.

Построение плана ускорений проводим непосредственно по уравнению (1.11). От произвольной точки π откладываем отрезок (πn_B) параллельно AB в направлении от B к A . Из точки n_B проводим отрезок ($n_B b$), изображающий ускорение $\vec{a}_B^\tau$. Соединив точку b с полюсом π , получим отрезок (πb), изображающий ускорение $\vec{a}_B$. Стрелки, указывающие

направление полученных векторов, расставляются согласно правилу векторного суммирования.

Для завершения построения левой части уравнения (1.11) из точки b откладываем отрезок (bn_{CB}) параллельно шатуну 2 в направлении от точки C к точке B , а из точки n_{CB} перпендикулярно шатуну проводим линию действия вектора $\vec{a}_{CB}^{\tau}$.

При построении ускорений, расположенных в правой части (1.11), учтем, что $\vec{a}_D^{\tau} = 0$, и совместим точку d плана ускорений с полюсом π . Из точки d построим параллельно CD отрезок (πn_{CD}) , направленный от точки C к точке D и изображающий вектор $\vec{a}_{CD}^n$. Из точки n_{CD} перпендикулярно CD проведем линию действия вектора $\vec{a}_{CD}^{\tau}$. Пересечение линий действия ускорений $\vec{a}_{CD}^{\tau}$ и $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ определит точку c — конец вектора искомого ускорения $\vec{a}_C$. Соединяя точку c и полюс π , замерим длину отрезка (πc) . Закончив построение плана ускорений, находим неизвестные ускорения $a_C = \mu_a(\pi c)$, $a_{CB}^{\tau} = \mu_a(n_{CB}c)$, $a_{CD}^{\tau} = \mu_a(n_{CD}c)$; а затем — угловые ускорения звеньев $\varepsilon_2 = a_{CB}^{\tau}/l_{CB}$, $\varepsilon_3 = a_{CD}^{\tau}/l_{CD}$.

Направления ускорений ε_2 и ε_3 , условно показанные на рис. 1.12, a круговыми стрелками, определяют векторы $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ и $\vec{a}_{CD}^{\tau}$, перенесенные с плана ускорений в точку C механизма.

Для нахождения ускорения a_E точки E шатуна используем свойство подобия плана ускорений. На отрезке (bc) плана ускорений строим Δbce , подобный ΔBCE плана положений и сходственно с ним расположенный. Полученную точку e соединим с полюсом π . Тогда $a_E = \mu_a(\pi e)$.

Аналогичными построениями определяется ускорение любой другой точки механизма.

1.2.3. Кинематический анализ механизмов аналитическими методами

Основные понятия и определения

Функцией положения какого-либо звена механизма называется зависимость координаты, определяющей положение этого звена, от обобщенной координаты механизма. У механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 1.13) с одной обобщенной координатой $q = \varphi_1$ функции положения шатуна BC и коромысла CD имеют вид зависимостей угловых координат этих звеньев φ_2 и φ_3 от координаты φ_1 :

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1); \quad \varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1).$$

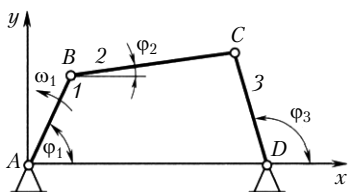


Рис. 1.13

Зависимость (1.12) описывает функцию положения звена, совершающего вращательное движение. Если звено движется поступательно, то его функция положения представляется в виде зависимости линейной координаты любой его точки S_k от обобщенных координат механизма:

$$S_k = S_k(q_1, \dots, q_n). \quad (1.13)$$

Функцию положения не всегда удастся получить в виде явной зависимости (1.12) или (1.13). В общем случае она описывается уравнениями

$$\Phi(\varphi_k, q_1, \dots, q_n) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi(S_k, q_1, \dots, q_n) = 0. \quad (1.14)$$

Аналогом скорости точки какого-либо звена механизма называется первая производная радиуса-вектора этой точки по обобщенной координате. Допустим, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор k -й точки звена механизма с одной степенью свободы. Учитывая, что обобщенная координата q является некоторой функцией времени, найдем скорость k -й точки звена

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{r}_k}{dq} \dot{q}.$$

Здесь $\frac{d\vec{r}_k}{dt}$ — аналог линейной скорости k -й точки звена; $\dot{q}$ — обобщенная скорость механизма.

Аналогом угловой скорости какого-либо звена механизма называется первая производная угловой координаты этого звена по обобщенной координате. Если положение i -го звена механизма с одной степенью свободы определяется угловой координатой φ_i , то угловую скорость его можно определить следующим образом:

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{dq} \dot{q},$$

где $\frac{d\varphi_i}{dt}$ — аналог угловой скорости i -го звена механизма.

Для механизма с n степенями свободы функция положения k -го звена является функцией соответствующего числа обобщенных координат

$$\varphi_k = \varphi_k(q_1, \dots, q_n), \quad (1.12)$$

где q_i ($i = 1, \dots, n$) — обобщенные координаты механизма.

Аналогом ускорения точки какого-либо звена механизма называется вторая производная радиуса-вектора этой точки по обобщенной координате механизма. В рассмотренном выше примере для механизма с одной степенью свободы ускорение k -й точки звена определяется выражением

$$\vec{a}_k = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dq^2} \dot{q}^2 + \frac{d \vec{r}_k}{dq} \ddot{q}.$$

Здесь $\frac{d^2 \vec{r}_k}{dq^2}$ — аналог ускорения k -й точки звена; $\ddot{q}$ — обобщенное ускорение механизма.

Аналогом углового ускорения какого-либо звена механизма называется вторая производная угловой координаты этого звена по обобщенной координате. Угловое ускорение i -го звена механизма находим следующим образом:

$$\varepsilon_i = \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi_i}{dq^2} \dot{q}^2 + \frac{d \varphi_i}{dq} \ddot{q}.$$

Здесь $\frac{d^2 \varphi_i}{dq^2}$ — аналог углового ускорения i -го звена.

Аналоги скоростей и ускорений применяют при исследовании динамики механизмов. Предварительное нахождение их облегчает определение законов движения звеньев механизма.

Примеры решения задач аналитическими методами

Как отмечалось выше, аналитические методы кинематического анализа механизмов отличаются большим разнообразием и используют математический аппарат аналитической геометрии, тензорно-матричных, векторных и других операций. Широкое распространение получили векторные аналитические методы кинематического анализа. Они эффективны, универсальны и позволяют решать задачи кинематики механизмов с достаточно сложной структурой. К числу таких методов относится погруппный векторный метод кинематического анализа плоских механизмов, излагаемый ниже на примере решения задач кинематики механизмов 2-го класса.

Погруппный метод, предложенный в работе [15], опирается на структурную классификацию механизмов по Ассуру — Артоболовскому и предназначен для решения задач кинематического анализа плоских механизмов различной струк-

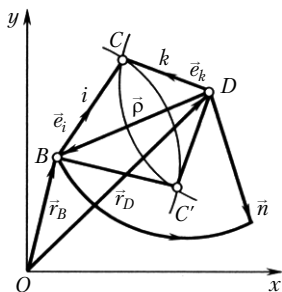


Рис. 1.14

туры. Алгоритм метода построен таким образом, что задачи кинематического анализа решаются сначала в общем виде, без учета конкретной схемы механизма. С этой целью применяют расчетные формулы для различных видов групп Ассура.

Затем выполняют несложную привязку полученных общих решений к заданному механизму. Для унификации расчетных формул ре-

комендуется вводить следующие обозначения кинематических пар структурной группы и звеньев (рис. 1.14): B и D — внешние (концевые) пары; C — внутренняя (средняя) пара; i — номер звена BC ; k — номер звена CD ; i^0, k^0 — номера звеньев механизма, к которым присоединяется группа.

Положение звеньев структурной группы зависит от положения внешних вращательных пар и осей внешних поступательных пар, а также от принятой сборки группы.

Задача о положениях для структурной группы 2-го класса первого вида. Положения внешних концевых кинематических пар B и D группы определяются радиусами-векторами $\vec{r}_B$ и $\vec{r}_D$ (см. рис. 1.14). Связав со стойкой произвольную систему координат xOy , можно найти координаты концевых пар x_B, y_B, x_D, y_D . Взаимное расположение концевых пар группы определяется вектором $\vec{\rho} = \vec{r}_B - \vec{r}_D$ (см. рис. 1.14) с проекциями

$$\rho_x = x_B - x_D; \quad \rho_y = y_B - y_D.$$

Нахождение углового положения звеньев группы связано с определением единичных векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_k$ осей звеньев i и k , направленных в сторону средней пары C . Задача о положениях звеньев группы считается решенной, если определены проекции векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_k$ на оси Ox, Oy , по значениям которых находятся углы φ_i и φ_k , образуемые соответствующими звеньями с осью Ox . Например, если в результате решения задачи определены $e_{ix} = \cos \varphi_i$ и $e_{iy} = \sin \varphi_i$, то угол, образованный звеном i с осью Ox , будет равен

$$\varphi = 2 \arctg z,$$

$$\text{где } z = \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{e_{iy}}{1 + e_{ix}}.$$

Задача о положениях имеет два решения, соответствующие двум возможным сборкам группы BCD и $BC'D$, симметрич-

ным относительно вектора $\vec{\rho}$ (см. рис. 1.14). Чтобы их различать между собой, вводится дополнительный вектор $\vec{n}$, ортогональный вектору $\vec{\rho}$ и построенный путем поворота последнего на угол 90° против хода часовой стрелки. У сборки $BC'D$ проекция вектора $\vec{e}_k$ на направление вектора $\vec{n}$ положительна, а у сборки BCD — отрицательна. Поэтому различать возможные сборки группы можно с помощью критерия, связанного со знаком параметра

$$\delta_1 = \text{sign}(\vec{e}_k, \vec{n}). \quad (1.15)$$

Параметр δ_1 принимает значения $+1$ для сборки $BC'D$ и -1 для сборки BCD . Изменение сборки группы возможно лишь при переходе через особое положение, в котором точки B , C и D располагаются на одной прямой, т.е. когда $(\vec{e}_k, \vec{n}) = 0$.

Для вывода расчетных формул задачи о положениях запишем условие замкнутости векторного контура $\overline{DCBD}$, определяющего относительное положение концевых пар группы:

$$\overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB} = \vec{\rho}.$$

С помощью векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_k$ это условие можно представить в виде следующей системы:

$$\vec{\rho} = \vec{e}_k l_k - \vec{e}_i l_i; \quad e_i^2 = 1; \quad e_k^2 = 1, \quad (1.16)$$

где l_i, l_k — длины звеньев i и k .

В системе (1.16) первое уравнение равносильно двум скалярным уравнениям, записанным в проекциях на оси Ox и Oy . В связи с этим вся система эквивалентна четырем скалярным уравнениям и позволяет определить проекции двух неизвестных векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_k$.

Для определения вектора $\vec{e}_k$ проведем следующие преобразования системы (1.16). Перепишем первое уравнение системы в виде $\vec{e}_k l_k - \vec{\rho} = \vec{e}_i l_i$ и возведем обе его части в скалярный квадрат. В результате получим

$$l_k^2 - 2l_k \vec{\rho} \vec{e}_k + \vec{\rho}^2 = l_i^2.$$

Разрешив это равенство относительно произведения $\vec{\rho} \vec{e}_k$, будем иметь

$$\vec{\rho} \vec{e}_k = f; \quad e_k^2 = 1, \quad (1.17)$$

где $f = \frac{1}{2l_k} (\vec{\rho}^2 + l_k^2 - l_i^2)$.

Из развернутой записи уравнений системы (1.17)

$$\rho_x e_{kx} + \rho_y e_{ky} = f; \quad e_{kx}^2 + e_{ky}^2 = 1 \quad (1.18)$$

очевидно, что первое уравнение линейно относительно проекции вектора $\vec{e}_k$, а второе является уравнением второй степени относительно этих проекций.

Система (1.18) имеет два решения, отвечающие двум возможным сборкам группы. Искомое решение определяет знак параметра δ_1 . Из первого уравнения системы находим

$$e_{ky} = \frac{1}{\rho_y} (f - \rho_x e_{kx}). \quad (1.19)$$

Подставив выражение (1.19) во второе уравнение системы (1.18), получим квадратное уравнение $a e_{kx}^2 - 2b e_{kx} + c = 0$, в котором $a = \rho_x^2 + \rho_y^2$, $b = f \rho_x$, $c = f^2 - \rho_y^2$. Решая это уравнение, получим

$$e_{kx} = \frac{1}{\rho_x^2 + \rho_y^2} \left[f \rho_x \pm \rho_y \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 - f^2} \right],$$

или

$$e_{kx} = \frac{1}{\rho_x^2 + \rho_y^2} (f \rho_x \pm \varepsilon \rho_y R), \quad (1.20)$$

где ε — коэффициент, значениями которого могут быть $+1$ или -1 ; $R = +\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 - f^2}$.

Найдем связь между коэффициентом ε и параметром δ_1 , который введен выражением (1.15). Если вектор $\vec{\rho}$ образует с осью Ox угол ψ , то угол между вектором $\vec{n}$ и этой осью равен $\psi + 90^\circ$. Имея в виду, что $|\vec{n}| = |\vec{\rho}| = \rho$, для проекций вектора $\vec{n}$ получим

$$\begin{aligned} n_x &= \rho \cos(\psi + 90^\circ) = -\rho \sin \psi = -\rho_y; \\ n_y &= \rho \sin(\psi + 90^\circ) = \rho \cos \psi = \rho_x. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Приняв во внимание, что параметр δ_1 определяет знак скалярного произведения $(\vec{e}_k, \vec{n}) = \lambda$, с учетом выражений (1.21) находим

$$\lambda = e_{kx} n_x + e_{ky} n_y = e_{ky} \rho_x - e_{kx} \rho_y.$$

Представим это выражение с помощью формул (1.19) и (1.20) в виде

$$\lambda = \frac{1}{\rho_y} [f \rho_x - (\rho_x^2 + \rho_y^2) e_{kx}] = -\varepsilon R. \quad (1.22)$$

Отсюда $\delta_1 = \text{sign } \lambda = -\varepsilon$.

Учитывая полученный результат в формулах (1.19) и (1.20), запишем окончательные расчетные зависимости, определяющие положение звена k :