АЛГЕБРАИЧЕСКІЙ АНАЛИЗЪ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ТЕОРІЯ ЧИСЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

ИЗЪ

ЛЕКЦІЙ

АДЪЮНКТА

Е. Янишевскаго.

КАЗАНЬ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1860.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Казанскаго университета, 1 сентября 1860 года.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЙ АНАЛИЗЪ.

ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ О ФУНКЦІЯХЪ И ИХЪ НЕПРЕРЫВНОСТИ.

1. Въ математическомъ анализѣ разсматриваются вообще два рода величинъ: величины *постоянныя*, которыя или не измѣняютъ своего значенія вовсе, какъ напримѣръ численныя величины, или же сохраняютъ одно и тоже значеніе въ продолженіе извѣстнаго рода вычисленія, тогда какъ при другомъ вычисленіи онѣ могутъ принять другое опредѣленное значеніе; послѣднія называются собственно *произвольными постоянными*; другаго рода величины, разсматриваемыя въ математическомъ анализѣ, называются *перемѣнными* — онѣ и въ продолженіе одного вычисленія могутъ принимать рядъ различныхъ значеній. Постоянныя величины обыкновенно означаются первыми буквами алфавита, перемѣнныя — послѣдними. Между перемѣнными рѣзко различаются два рода величинъ: однѣ изъ нихъ могутъ измѣняться совершенно произвольно, безъ всякаго опредѣленнаго закона, другія же измѣняются только по извѣстному опредѣленному закону, или хотя и не по извѣстному закону, но въ очевидной зависимости отъ измѣненія другихъ перемѣнныхъ; первыя называются *перемѣнными независимыми*, а вторыя ихъ *функціями*.

Прим. 1-й. Назовемъ T температуру мѣста, φ географическую широту его, t время; очевидно что температура T будетъ различна для различныхъ широтъ и для различнаго времени, слѣдовательно T есть функція φ и t; а какъ мы можемъ разсматривать температуру въ одной и той же широтѣ, но въ разное время, или въ разныхъ широтахъ, но въ одно и тоже время, по произволу, то очевидно, что φ и t будутъ перемѣнныя независимыя. Хотя зависимость измѣненій температуры T отъ измѣненій широты φ и времени t очевидна, но законъ по которому измѣняется T съ измѣненіемъ φ и t неизвѣстенъ, такъ что по даннымъ φ и t мы не можемъ вычислить температуру T. Такого рода функціи мы можемъ называть *неопредѣленными*.

Прим. 2-й. Назовемъ V объемъ прямаго цилиндра съ круговымъ основаніемъ, r радіусъ круга основанія, h высоту цилиндра; V очевидно будетъ измѣняться съ измѣненіемъ r и h и законъ этихъ измѣненій будетъ выражаться формулою

$$V = \pi r^2 . h,$$

по которой и можно вычислить V для всякаго даннаго значенія величинъ r и h; сверхъ того r и h мы можемъ измѣнять совершенно произвольно вмѣстѣ или порознь; слѣдовательно r и h будутъ независимыя перемѣнныя, V ихъ функція, которую мы можемъ назвать *опредѣленною*. Величина π, отношеніе окружности къ діаметру, будетъ постоянная.

2. Законъ измѣненія функцій вслѣдствіе измѣненія независимыхъ перемѣнныхъ можетъ быть разнообразенъ до безконечности, поэтому и функціи бываютъ разнообразны до безконечности. Различнаго рода законъ зависимости измѣненій функціи отъ измѣненій независимыхъ перемѣнныхъ означается различнаго рода условными знаками. Такимъ образомъ если x и y, означаютъ независимыя перемѣнныя, z ихъ функцію, то одна опредѣленная зависимость z отъ y и x означается символическимъ знакомъ $z = F(x, y)$, другая зависимость должна быть означена уже иначе, напримѣръ $z = f(x, y)$, или $z = \varphi(x, y)$ и т. д. Вообще различнаго рода функціи отличаются одни отъ другихъ, при символическомъ ихъ означеніи, буквою стоящею предъ скобками, въ которыхъ написаны независимыя перемѣнныя.

Прим.

$$z = x^2 + axy + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = tg\,(x + ay + b^2),\ z = x^m + ax^n + bx^p + cx^r + \ldots.$$

и проч. Здѣсь z будетъ функція перемѣнныхъ x и y, или одной только перемѣнной x; a, b, c..... m, n, p..... величины постоянныя.

3. Во всѣхъ предыдущихъ примѣрахъ зависимость z отъ x и y была такова, что мы прямо видимъ какого рода дѣйствіе должно произвести надъ перемѣнными величинами для полученія ихъ функціи. Такого рода функціи называются *явными*. Но иногда законъ зависимости функцій отъ независимыхъ перемѣнныхъ дается подъ видомъ нерѣшеннаго уравненія, которое должно быть предварительно рѣшено для того чтобы потомъ можно было приступить къ вычисленію функціи по данному значенію независимыхъ перемѣнныхъ. Такія функціи называются *неявными*. Пусть x и y означаютъ независимыя перемѣнныя, z ихъ неявная функція; тогда зависимость z отъ x и y выражается символическимъ уравненіемъ

$$f(x, y, z) = 0$$

или

$$\psi(x, y, z) = 0 \text{ и т. д.}$$

Прим.

$$y^2 + axy + x^2 = 0,$$

$$e^{mxy} - x = 0,$$

$$\operatorname{Sin}\frac{x+y}{2} - \operatorname{Log}\sqrt{ax + hy + cz} + axyz = 0,$$

и проч.

Изъ этихъ примѣровъ очевидно, что неявныя функціи могутъ переходить въ явныя, если рѣшимъ уравненіе которымъ связаны онѣ съ независимыми перемѣнными. Такъ изъ первыхъ двухъ уравненій получаемъ

$$y = x\left\{\frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right\} \text{ и } y = \frac{lx}{mx},$$

гдѣ l означаетъ гиперболическій логарифмъ, котораго основаніе e. Здѣсь y становится явною функціею отъ x.

Неявныя функціи иногда опредѣляются нѣсколькими совмѣстными уравненіями; напримѣръ

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \text{ и } \psi(x, y, z, u) = 0.$$

Очевидно, что здѣсь двѣ только изъ величинъ x, y, z, u можно принимать за независимыя перемѣнныя, остальныя будутъ ихъ функціями, ибо приписавъ напр. x и y опредѣленныя значенія, мы можемъ предполагать, что z и u могутъ быть вычислены при помощи двухъ предыдущихъ уравненій, какъ совмѣстныхъ.

Прим.

$$xu + yv = pz$$

$$zu + tv = qz$$

принимая x, y, t за независимыя перемѣнныя мы можемъ, по даннымъ значеніямъ этихъ величинъ, найдти соотвѣтствующія значенія ихъ функцій u и v; а именно:

$$u = \frac{pzt - qzx}{tx - zy}, \quad v = \frac{qx^2 - pz^2}{tx - zy}.$$

Иногда зависимость между перемѣнными и ихъ функціями бываетъ такъ сложна, что и рѣшеніе самыхъ уравненій выражающихъ эту зависимость бываетъ невозможно; во всякомъ случаѣ однакожъ зависимость измѣненій функціи отъ измѣненія независимыхъ перемѣнныхъ очевидна, хотя законъ ихъ и не извѣстенъ, и слѣдовательно понятіе о функціяхъ не нарушается.

4. Если зависимость между перемѣнною величиной и ея функціею такова, что для каждаго значенія перемѣнной, функція получаетъ опредѣленное значеніе и при весьма маломъ измѣненіи перемѣнной измѣненія функціи также весьма малы и пропорціональны измѣненію перемѣнной, то такая функція называется *непрерывною*. Пусть $z = f(x)$; давая перемѣнной x два значенія a и $a + h$, гдѣ h величина неизмѣримо малая, для функціи z получимъ соотвѣтственныя значенія $f(a)$ и $f(a + h)$; функція z бу-

детъ непрерывною, если оба значія ея $f(a)$ и $f(a+h)$ будутъ для конечнаго значенія a, конечныя и опредѣленныя, и притомъ если разность $f(a+h)-f(a)$ будетъ неизмѣримо мала, когда h неизмѣримо мало. Напротивъ если, для извѣстнаго значенія перемѣнной, функція изъ дѣйствительной вдругъ переходитъ въ воображаемую или, при весьма маломъ измѣненіи перемѣнной, измѣняется на величину конечную или безконечно большую, то такая функція называется *прерывною*. Прорывы функціи могутъ быть только для извѣстныхъ значеній перемѣнной, тогда какъ для всѣхъ прочихъ она можетъ оставаться непрерывною.

Прим. 1-й

$$y = ax^2 + b, \quad y = \text{Cos}\, x, \quad y = \text{Sin}\, x \text{ и проч.}$$

Здѣсь y будетъ функція непрерывная перемѣнной x, потому что для опредѣленнаго значенія этой послѣдней, напримѣръ m, она получаетъ опредѣленныя дѣйствительныя значенія.

$$am^2 + b, \quad \text{Cos}\, m, \quad \text{Sin}\, m;$$

притомъ разности

$$a(m+h)^2 + b - \{am^2 + b\}, \text{Cos}\,(m+h) - \text{Cos}\, m,$$

$$\text{Sin}\,(m+h) - \text{Sin}\, m;$$

или

$$ah(2m+h), \quad -2\,\text{Sin}\left(m + \frac{h}{2}\right)\text{Sin}\,\frac{h}{2},$$

$$2\,\text{Cos}\left(m + \frac{h}{2}\right)\text{Sin}\,\frac{h}{2},$$

при весьма маломъ h, также весьма малы и изчезаютъ вмѣстѣ съ h для всякаго конечнаго значенія величины m.

Прим. 2-й.

$$y = tgx.$$

Очевидно, что эта функція остается непрерывною между границами для перемѣнной $x = 0$, и $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$, и т. д. ибо разность между двумя послѣдовательными значеніями этой функціи, для послѣдовательныхъ значеній перемѣнной $x = a$, $x = a + h$, можетъ быть представлена такимъ образомъ

$$tg\,(a+h) - tg\,a = \left\{1 + tg\,(a+h)\,tg\,a\right\} tg\,h,$$

откуда очевидно, что разность эта будетъ безконечно мала, когда h безконечно мало, для всѣхъ значеній a, исключая тѣхъ, которыя близки на $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ...; когда значенія a близки къ этимъ величинамъ, то хотя h и безконечно мало, но разность $tg\,(a+h) - tg\,a$ можетъ быть величиною конечною или даже безконечно большою, въ слѣдствіе множителя $tg\,a$ во второй части прэдыдущаго равенства.

Прим. 3-й.

$$y = (x-2)\sqrt{x-3}.$$

Если x измѣняется отъ 0 до 2, функція y не имѣетъ дѣйствительнаго значенія, но если $x = 2$, то $y = 0$ — это первое дѣйствительное значеніе функціи, за которымъ она снова становится воображаемою до тѣхъ поръ пока $x > 2$ но < 3. Слѣдовательно прерывъ функціи y происходитъ въ то время, когда $x = 2$. Для всѣхъ значеній x большихъ 3 функція непрерывна, ибо разность между двумя послѣдовательными ея значеніями можетъ быть написана такимъ образомъ:

$$(a+h-2)\sqrt{a+h-3} - (a-2)\sqrt{a-3} = h\left\{\frac{3a-8}{2\sqrt{a-3}} + \ldots\ldots\right\},$$

откуда очевидно, что при h безконечно маломъ эта разность будетъ также безконечно мала, если $a > 3$.

СВОЙСТВА ЦѢЛЫХЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

5. Если для полученія функціи надъ перемѣнной величиной должно произвести конечное число алгебраическихъ дѣйствій, разумѣя подъ этими послѣдними сложеніе, вычитаніе, умноженіе,

дѣленіе, возвышеніе въ степени и извлеченіе радикаловъ, то такая функція называется *алгебраическою*. Если въ алгебраической функціи надъ перемѣнной величиной производится только дѣйствіе сложенія, вычитанія, умноженія и возвышенія въ цѣлыя и положительныя степени, то алгебраическая функція называется *цѣлою раціональною*. Самая высшая степень перемѣнной величины называется *степенью функціи*.

Мы займемся изслѣдованіемъ свойствъ этихъ послѣднихъ.

По самому опредѣленію очевидно, что общій видъ цѣлой раціональной функціи одной перемѣнной будетъ такой:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = f(x), \qquad (1)$$

гдѣ m означаетъ цѣлое положительное и конечное число, $p_1, p_2, p_3, \dots\dots p_m$, какія угодно дѣйствительныя или воображаемыя величины, но не зависящія отъ x.

6. Предполагая эту функцію всегда расположенную по нисходящимъ степенямъ перемѣнной величины, докажемъ, что *для перемѣнной всегда можно выбрать такое значеніе, при которомъ одинъ изъ членовъ функціи будетъ больше суммы всѣхъ членовъ за нимъ слѣдующихъ*.

Назовемъ $p_r x^\mu$ одинъ изъ членовъ функціи $f(x)$, и докажемъ, что извѣстными значеніями x, всегда можно удовлетворить неравенству.

$$p_r x^\mu > p_{r+1} x^{\mu-1} + p_{r+2} x^{\mu-2} + \dots\dots + p_{m-1} x + p_m \qquad (2)$$

Пусть наибольшій изъ коефиціентовъ $p_r, p_{r+1}, p_{r+2}, \dots\dots p_{m-1}, p_m$ будетъ p_s; взявъ этотъ коеффиціентъ со знакомъ + составимъ неравенство.

$$p_r x^\mu > p_s x^{\mu-1} + p_s x^{\mu-1} + \dots\dots + p_s x + p_s;$$

очевидно, если найдемъ значенія x удовлетворяющія этому неравенству, то неравенство предыдущее тѣмъ скорѣе будетъ удовлетворено. Но послѣднее неравенство можно написать еще такъ:

$$p_r x^{\mu} > p_s (x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + \dots\dots + x + 1)$$

или

$$p_r x^{\mu} > p_s \frac{x^{\mu} - 1}{x - 1},$$

а это неравинство очевидно будетъ удовлетворено, если для x найдемъ такую величину, которая удовлетворяетъ слѣдующему —

$$p_r x^{\mu} > p_s \frac{x^{\mu}}{x - 1},$$

или:

$$p_r > p_s \frac{1}{x - 1}$$

для чего должно только брать

$$x > \frac{p_s + p_r}{p_r}.$$

И такъ, всегда можно найдти такія значенія для перемѣнной величины, при которыхъ членъ съ высшею ея степенью бубудетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ функціи $f(x)$.

Точно также докажемъ, что *для перемѣнной можно выбрать такія значенія, при которыхъ одинъ изъ членовъ функціи $f(x)$ будетъ больше суммы всѣхъ членовъ ему предшествующихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, докажемъ, что можно найдти такія значенія, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$x^{m} + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots\dots + p_{r-1} x^{\mu+1} < p_r x^{\mu} \qquad (3).$$

Назовемъ p_q численное значеніе самаго большаго изъ коэффиціентовъ $p_1, p_2, \dots\dots p_{r-1}$ и составимъ неравенство

$$p_q x^{\mu+1} (x^{m-\mu-1} + x^{m-\mu-2} + \dots\dots + x + 1) < p_r x^{\mu};$$

если найдемъ значенія x, удовлетворяющія послѣднему неравенству, то тѣмъ скорѣе будетъ удовлетворено неравенство (3). Но изъ послѣдняго мы получимъ:

$$p_q x \frac{1 - x^{m-\mu}}{1 - x} < p_r$$

откуда

$$x < \frac{p_r}{p_q + p_r}$$

И такъ, для всѣхъ значеній x меньшихъ или равныхъ дроби $\frac{p_r}{p_q + p_r}$, неравенство (3) будетъ удовлетворено. Отсюда слѣдуетъ, что *для перемѣнной величины въ функціи $f(x)$ всегда можно выбрать такія значенія, при которыхъ членъ съ низшею ея степенью будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ.*

Прим. 1-й. Данъ многочленъ

$$x^3 + x^2(3y - 4) + x(3y^2 - 8y + 2) + y^3 - 4y^2 + 2y + 1,$$

найдти такія значенія x, при которыхъ, для $y = 2$, членъ съ первою степенью x былъ бы больше суммы предыдущихъ членовъ.

Отв. $x \overset{=}{<} \frac{1}{2}$.

Прим. 2-й. При такомъ же предположеніи относительно величины y, найдти для x такія значенія, при которыхъ членъ съ x^2 былъ бы больше всѣхъ слѣдующихъ членовъ.

Отв. $x \overset{=}{>} 4$.

7. Всякая функція, по самому опредѣленію своему, измѣняется вмѣстѣ съ измѣненіемъ независимой перемѣнной. Мы разсмотримъ, какимъ образомъ можетъ быть представлено измѣненіе цѣлой раціональной функціи, когда независимая перемѣнная получитъ какое нибудь произвольное приращеніе. Вставимъ въ функцію X, $x + h$

вмѣсто x, измѣненное значеніе функціи назовемъ $f(x+h)$; получимъ:

$$f(x+h) = (x+h)^m + p_1 (x+h)^{m-1} + p_2 (x+h)^{m-2} + \dots\dots + p_{m-1} (x+h) + p_m.$$

Но для всякаго цѣлаго и положительнаго m мы имѣетъ

$$(x+h)^m = x^m + m x h^{m-1} + m_c^{2} x^{m-2} h + \dots\dots + m x h^{m-1} + h^m;$$

а потому, собирая въ функціи $f(x+h)$ члены съ одинаковою степенью h, мы можемъ написать ее такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} f(x+h) = {} & x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots\dots + p_{m-1} x + p_m \\ & + \{ m x^{m-1} + p_1 (m-1) x^{m-2} + p_2 (m-2) x^{m-3} + \dots\dots + p_{m-1} \} h \\ & + \{ m(m-1) x^{m-2} + p_1 (m-1)(m-2) x^{m-3} + \dots\dots + 2 p_{m-2} \} \frac{h^2}{1.2} \\ & + \{ m(m-1)(m-2) x^{m-3} + p_1 (m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4} \\ & \qquad + \dots\dots 3.2.1.\, p_{m-3} \} \frac{h^3}{1.2.3.} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \{ m(m-1)(m-2) \dots\dots 2.\, x + p_1 (m-1) \dots\dots 2.1. \} \frac{h^{m-1}}{1.2.3\dots m-1} \\ & + m(m-1)(m-2) \dots\dots 2.1 \frac{h^m}{1.2.3.4\dots m} \end{aligned}$$

Разсматривая видъ коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ h, $\frac{h^2}{1.2}$, $\frac{h^3}{1.2.3}$, ... легко замѣтить, что каждый коэффиціентъ при этихъ степеняхъ составляется изъ коэффиціента предыдущаго члена точно такимъ же образомъ какимъ коэффиціентъ при первой степени h составляется изъ функціи $f(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, во первыхъ замѣчаемъ, что членъ независящій отъ h въ предыдущей строкѣ есть первоначальный видъ функціи $f(x)$; во вторыхъ коеффиціентъ при h получится изъ функціи X, если въ каждомъ ея членѣ коеффиціенты при различныхъ степеняхъ X помножимъ на соотвѣтствующіе показатели этой буквы, а самые показатели уменьшимъ еденицею и наконецъ отбросимъ членъ независящій отъ x; коеффиціентъ при $\frac{h^2}{1.2}$ совершенно по тому же закону составляется изъ коеффиціента при h, и т. д.

8. Вслѣдствіе этаго общаго закона составленія коеффиціентовъ при степеняхъ h, они и означаются по одному общему закону; такимъ образомъ: коеффиціентъ при первой степени h, непосредственно происходящій отъ функціи $f(x)$ называется *первою ея производною функціею*, и означается $f'(x)$; коеффиціентъ при $\frac{h^2}{1.2}$ называется первою производнюю отъ $f'(x)$ или *второю производною* отъ $f(x)$ и означается $f''(x)$ и т. д. Прозводная m-я или m-го порядка отъ $f(x)$ будетъ слѣдовательно величина постоянная и равна $m(m-1)\ldots\ldots 2.1$, а производная $m+1$-го порядка и слѣдующія будутъ равны нулю, потому что производная m-го порядка состоитъ только изъ одного члена съ нульною степенью отъ x, и потому, вслѣдствіе общаго закона составленія производныхъ, слѣдующая производная необходимо равна нулю, для всякаго конечнаго значенія m. И такъ по обще-принятому означенію, функція $f(x+h)$ можетъ быть представлена такимъ образомъ

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)+h^{2}_{e}f''(x)+h^{3}_{c}f'''(x)+\ldots\ldots+h^{m} \qquad (4)$$

Эта строка, весьма замѣчательная въ анализѣ, носитъ названіе *строки Тейлора*, по имени изобрѣтателя; въ Дифференціальномъ исчисленіи доказываютъ ее для всѣхъ вообще функцій. Въ настоящее время мы воспользуемся этой строкой для доказательства нѣкоторыхъ свойствъ функцій цѣлыхъ раціональныхъ.

а) При помощи этой строки легко убѣдиться, что цѣлыя раціональныя функціи, для всякаго конечнаго значенія перемѣнной величины, суть функціи непрерывныя. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе строки Тейлора, приращеніе функціи $f(x)$, соотвѣтствующее приращенію h независимой перемѣнной, можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$f(x+h)-f(x)=h\,f(x)'+\overset{2}{h}_c\,f''(x)+\overset{3}{h}_c\,f'''(x)+\cdots+h^m \quad (5)$$

Но, по доказанному нами, для h всегда можно выбрать такъ малую величину, что членъ съ первою его степенью, для всякаго конечнаго значенія перемѣнной x, будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ строки; тѣмъ скорѣе подобное неравенство будетъ имѣть мѣсто для h безконечно малаго, а какъ членъ съ первою степенью h становится безконечно малымъ, какъ скоро h безконечно мало, если только значенія независимсй перемѣнной конечны, то отсюда и слѣдуетъ, что приращеніе функціи X представляемое разностью $f(x+h)-f(x)$ будетъ безконечно мало, если приращеніе независимой перемѣнной безконечно мало.

b) *Всякая цѣлая раціональная функція, при измѣненіи независимой перемѣнной не можетъ перейти изъ положительной въ отрицательную, или наоборотъ, не сдѣлавшись въ промежуткѣ равною нулю.*

Дѣйствительно въ (4) равенствѣ знакъ второй его части, при весьма маломъ h, зависитъ отъ перваго члена; а слѣдовательно, если при $x=a-h$, функція $f(x)$ положительна, а при $x=a+h$ отрицательна, и притомъ какъ бы h мало не было, то очевидно, что вторая часть равенства (4.) изъ положительной должна перейти въ отрицательную, когда x измѣняется отъ $a-h$ до $a+h$; или когда вмѣсто $-h$ поставимъ $+h$; а это возможно только тогда, когда членъ независящій отъ h будетъ равенъ нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что *если два какія нибудь значенія перемѣнной $x=a$ и $x=b$, доставляютъ функціи $f(x)$ значенія съ противными знаками, то между a и b найдется по крайнѣй мѣрѣ одно значеніе $x=c$, которое приводитъ функцію $f(x)$ къ нулю.*

c) *До своего уничтоженія функція $f(x)$ имѣетъ знакъ противный съ своею первою производной, послѣ уничтоженія — одинакій.*

Пусть значеніе перемѣнной $x = a$ уничтожаетъ функцію $f(x)$, не измѣняя своего знака. Тогда значеніе функціи $f(x)$ до уничтоженія, для $x = a - h$ будетъ

$$f(a-h) = -h f'(a) + \frac{h^2}{c} f''(a) - \frac{h^3}{c} f'''(a) + \cdots\cdots,$$

а послѣ уничтоженія, для $x = a + h$,

$$f(a+h) = +h f'(a) + \frac{h^2}{c} f''(a) + \frac{h^3}{c} f'''(a) + \cdots\cdots$$

Откуда теорема становится очевидною.

9. Строка Тейлора даетъ намъ возможность узнать, будетъ ли функція возрастать вмѣстѣ съ увеличеніемъ перемѣннаго и уменьшаться съ его уменьшеніемъ, или, наоборотъ, — она будетъ уменьшаться, когда перемѣнное увеличивается, и увеличивается, когда оно уменьшается.

Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія (5) очевидно, что при h положительномъ, и весьма маломъ, разность $f(x+h) - f(x) > 0$, если $f'(x) > 0$ и $f(x+h) - f(x) < 0$, если $f'(x) < 0$, ибо первый членъ второй части этаго уравненія, для h весьма малаго, будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ, и слѣдовательно знакъ разности $f(x+h) - f(x)$ зависитъ отъ знака $h f'(x)$. Обратныя получимъ заключенія, если $h < 0$, тогда очевидно разность $f(x+h) - f(x) > 0$, если $f'(x) < 0$ и $f(x+h) - f(x) < 0$, если $f'(x) > 0$.

И такъ вообще, *функція будетъ возрастать вмѣстѣ съ увеличеніемъ перемѣннаго, начиная отъ извѣстнаго его значенія и уменьшаться съ его уменьшеніемъ, если первая производная этой функціи, для разсматриваемаго значенія перемѣнной, будетъ положительна.* На оборотъ *функція будетъ уменьшаться, когда перемѣнное увеличивается, и увеличиваться, когда перемѣнное уменьшается,—если первая производная отрицательна.*

10. Отсюда выходитъ весьма интересное слѣдствіе: *когда*