ГЕОДЕЗИЧЕСКІЯ ИЗСЛѢДОВАНІЯ

ГАУССА, БЕССЕЛЯ

И

ГАНЗЕНА.

ИЗДАНІЕ И ПЕРЕВОДЪ

А. ТИЛЛО.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

1866.

ВЪ ТИПОГРАФІИ Н. ТИБЛЕНА И КОМП. (Н. НЕКЛЮДОВА).
(Вас. Остр. 8-я линія № 25.)

Совѣщательный Астрономъ В. Т. О. Главнаго Штаба, В. К. Делленъ, въ бытность свою за границей, въ Октябрѣ 1865 года, получилъ лично отъ Д-ра Ганзена, только что изданное имъ сочиненіе. подъ заглавіемъ: „Geodätische Untersuchungen". Сознавая всю важность этого труда для высшей Геодезіи, Профессоръ Делленъ, по возвращеніи своемъ въ Пулково, побудилъ меня издать сочиненіе Ганзена на русскомъ языкѣ. и далъ мнѣ совѣтъ присоединить къ тому переводъ остальныхъ монографій. считающихся основными въ области высшей Геодезіи. Когда трудъ мой былъ оконченъ. то, по представленію В. К. Деллена. и по непосредственному ходатайству Начальника Николаевской Академіи Генеральнаго Штаба. Генералъ-Маіора А. Н. Леонтьева. Совѣщательный Комитетъ Генеральнаго Штаба назначилъ на предстоящее изданіе опредѣленную денежную сумму.

Выражаю здѣсь мою искреннюю признательность названнымъ личностямъ. за обязательное ихъ содѣйствіе. въ этомъ отношеніи.

Пулково. **А. Тилло.**

Октябрь 1866 г.

ОБЩЕЕ

РѢШЕНІЕ ВОПРОСА:

как изобразить части данной поверхности на другой данной поверхности такъ, чтобы сохранялось подобіе въ малѣйшихъ частяхъ.

К. Ф. ГАУССА.

1. Свойство какой-либо кривой поверхности опредѣляется уравненіемъ между координатами x, y, z, относящимися къ каждой точкѣ этой поверхности. Каждая изъ перемѣнныхъ, входящихъ въ уравненіе, можетъ быть разсматриваема какъ функція отъ остальныхъ двухъ; но наше представленіе сдѣлается болѣе общимъ, если введемъ еще двѣ новыя перемѣнныя t, u, въ зависимости отъ которыхъ и выразимъ каждую изъ величинъ x, y, z; такъ что, вообще говоря, опредѣленнымъ значеніямъ перемѣнныхъ t и u всегда будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка поверхности, и обратно.

2. Пусть для какой-либо другой кривой поверхности X, Y, Z, T, U означаютъ соотвѣтственно тоже самое, что x, y, z, t, u въ отношеніи къ первой поверхности.

3. *Изобразить* первую поверхность на второй *значитъ найти законъ*, по которому каждой точкѣ первой поверхности должна соотвѣтствовать опредѣленная точка второй поверхности. Мы удовлетворимъ такому требованію, если примемъ T и U опредѣленными функціями отъ перемѣнныхъ t и u. Въ тѣхъ случаяхъ, когда изображеніе должно будетъ удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, вышеозначенныя функціи не будутъ произвольными. А такъ какъ вмѣстѣ съ тѣмъ X, Y, Z будутъ также функціями отъ t и u, то эти функціи должны будутъ удовлетворить нетолько условіямъ, проистекающимъ отъ свойства второй поверхности, но и тѣмъ условіямъ, которыя должны быть выполнены при изображеніи.

4. Задача, предложенная въ 1822 г. копенгагенскимъ обществомъ наукъ, требуетъ, чтобы изображеніе было подобно оригиналу въ безконечно малыхъ частяхъ. А потому, прежде всего, надлежитъ выразить это условіе аналитически.

Дифференцируя функціи отъ t и u, которыя служатъ выраженіями для x, y, z, X, Y, Z, получимъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} dx &= adt + a'du \\ dy &= bdt + b'du \\ dz &= cdt + c'du \\ dX &= Adt + A'du \\ dY &= Bdt + B'du \\ dZ &= Cdt + C'du \end{aligned}$$

Для удовлетворенія требуемому условію, нужно, вопервыхъ, чтобы существовала пропорціональность между всѣми безконечно малыми линіями, проведенными на первой поверхности изъ-какой либо ея точки, и соотвѣтствующими линіями на другой поверхности; а вовторыхъ, чтобы углы, заключающіеся между означенными линіями на первой поверхности, были равны угламъ, образуемымъ соотвѣтствующими линіями на второй поверхности.

Длина линейнаго элемента на первой поверхности

$$=\sqrt{\left((aa+bb+cc)\, dt^2+2(aa'+bb'+cc')\, dt.\, du+(a'a'+b'b'+c'c')\, du^2\right)}$$

а длина соотвѣтствующаго элемента на второй поверхности

$$=\sqrt{\left((AA+BB+CC)dt^2+2(AA'+BB'+CC')dt.\, du+(A'A'+B'B'+C'C')du^2\right)}$$

Эти элементы, согласно вышеизложенному условію, должны быть между собою въ опредѣленномъ соотношеніи, независимо отъ величинъ dt и du; а потому, ясно, что три величины

$$aa+bb+cc,\quad aa'+bb'+cc',\quad a'a'+b'b'+c'c'$$

должны быть соотвѣтственно пропорціональны величинамъ

$$AA+BB+CC,\quad AA'+BB'+CC',\quad A'A'+B'B'+C'C'$$

Если конечнымъ точкамъ втораго элемента на первой поверхности сотвѣтствуютъ значенія:

$$t,\ u \text{ и } t+\delta t,\ u+\delta u$$

то косинусъ угла между этимъ вторымъ элементомъ и вышеозначеннымъ первымъ элементомъ

$$=\frac{(adt+a'du)(a\delta t+a'\delta u)+(bdt+b'du)(b\delta t+b'\delta u)+(cdt+c'du)(c\delta t+c'\delta u)}{\sqrt{\left((adt+a'du)^2+(bdt+b'du)^2+(cdt+c'du)^2\right).\left((a\delta t+a'\delta u)^2+(b\delta t+b'\delta u)^2+(c\delta t+c'\delta u)^2\right)}}$$

а для косинуса угла между соотвѣтствующими элементами второй поверхности будемъ имѣть выраженье точно такого же вида, только вмѣсто буквъ a, b, c, a', b', c' въ немъ будутъ буквы A, B, C, A', B', C'. Не трудно видѣть, что эти два выраженья будутъ между собою равны, коль скоро имѣетъ мѣсто вышеозначенная пропорціональность; такъ что второе условіе само собой удовлетворяется, если первое выполнено. Въ справедливости только что сказаннаго можно, впрочемъ, убѣдиться и непосредственнымъ разрушеніемъ.

Итакъ, аналитическое выраженье нашей задачи будетъ заключаться въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$\frac{AA+BB+CC}{aa+bb+cc}=\frac{AA'+BB'+CC'}{aa'+bb'+cc'}=\frac{A'A'+B'B'+C'C'}{a'a'+b'b'+c'c'}$$

Обозначимъ выраженье это, которое будетъ конечною функціею отъ t и u, черезъ mm, такъ что m будетъ означать то отношеніе, въ коемъ линейныя величины на первой поверхности будутъ больше или меньше *) соотвѣтствующихъ изображеній на второй поверхности. Отношеніе это, вообще говоря, будетъ различно для различныхъ мѣстъ на поверхности. Въ томъ частномъ случаѣ, когда m есть постоянная величина, подобіе будетъ существовать и въ конечныхъ частяхъ; если же, сверхъ того $m=1$, то между изображеніями будетъ существовать полное равенство, такъ что первая поверхность можетъ слиться со второю.

5. Полагая, для краткости,

$$(aa+bb+cc)\ dt^2+2\ (aa'+bb'+cc')\ dt.\ du+(a'a'+b'b'+c'c')\ du^2=\omega$$

замѣтимъ, что дифференціальное уравненіе $\omega=0$ допускаетъ два интегрированія. Именно, если разложить трехчленъ ω на два множителя, линейные относительно dt и du, то либо тотъ, либо другой множитель долженъ равняться нулю, что и допускаетъ два различныхъ интегрированія.

Одно изъ интегрированій будетъ соотвѣтствовать уравненію

$$0=(aa+bb+cc)\ dt$$
$$+\left\{aa'+bb'+cc'+i\sqrt{((aa+bb+cc)(a'a'+b'b'+c'c')-(aa'+bb'+cc')^2)}\right\}du$$

(причемъ $i=\sqrt{-1}$, ибо легко убѣдиться, что ирраціональная часть этого уравненія мнимая); а другое интегрированіе будетъ соотвѣт-

*) Смотря по тому, m больше или меньше единицы.

ствовать такому же выраженью, какъ предыдущее, только вмѣсто i въ немъ нужно поставить $-i$. Итакъ, если интеграломъ перваго уравненія будетъ выраженье

$$p + iq = \mathrm{Const}$$

гдѣ p и q суть вещественныя функціи отъ t и u, то другой интегралъ будетъ равенъ

$$p - iq = \mathrm{Const}$$

А по существу предмета

$$(dp + idq)\ (dp - idq) \ \text{или}\ (dp^2 + dq^2)$$

будетъ множителемъ ω

или

$$\omega = n\ (dp^2 + dq^2)$$

гдѣ n означаетъ конечную функцію отъ t и u.

Отъ подстановки въ выраженье

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

вмѣсто dX, dY, dZ ихъ значеній, выраженныхъ помощью T, U, dT, dU, получимъ трехчленъ, который назовемъ чрезъ Ω; и примемъ, что, на вышеизложенныхъ основаніяхъ, интегралами уравненія $\Omega = 0$ будутъ выраженья:

$$P + iQ = \mathrm{Const}$$
$$P - iQ = \mathrm{Const}$$
$$\text{и}\ \ \Omega = N(dP^2 + dQ^2)$$

гдѣ P, Q, N означаютъ вещественныя функціи отъ T и U.

Ясно, что означенныя интегрированія могутъ быть произведены до рѣшенія нашей главной задачи.

Если вмѣсто T и U подставимъ такія функціи отъ t и u, которыя бы удовлетворяли условію нашей главной задачи, то Ω превратится въ $mm\omega$, и будемъ имѣть:

$$\frac{(dP + idQ)\ .\ (dP - idQ)}{(dp + idq\ \ .\ (dp - idq)} = \frac{mmn}{N}$$

Легко видѣть, что числитель первой части этого уравненія только тогда дѣлится на знаменателя, когда

либо $dP + idQ$ дѣлится на $dp + idq$ и $dP - idQ$ на $dp - idq$,

либо $dP + idQ$ дѣлится на $dp - idq$ и $dP - idQ$ на $dp + idq$.

Въ первомъ случаѣ, при $dp + idq = 0$, $dP + idQ$ тоже равно нулю, слѣдовательно, когда $p + iq$ дѣлается постояннымъ, то $P + iQ$ также становится постояннымъ а это сводится къ тому, что $P + iQ$ функція только отъ $p + qi$, и точно также $P - iQ$ будетъ функціей только отъ $p - iq$. Въ другомъ же случаѣ $P + iQ$ будетъ функціею отъ $p - iq$, а $P - iQ$ функціею отъ $p + iq$ Не трудно убѣдиться, что эти же самыя заключенія можно сдѣлать и въ обратномъ порядкѣ: если принять $P + iQ$, $P - iQ$ функціями отъ $p + iq$, $p - iq$, то окажется, что частное отъ раздѣленія Ω на ω есть конечная величина, откуда будетъ слѣдовать та пропорціональность, которая найдена была выше, въ силу принятаго условія.

Если положимъ, напримѣръ,

$$P + iQ = f(p + iq) \quad , \quad P - iQ = f'(p - iq)$$

то не трудно удостовѣриться, что свойство функціи f' обусловливается уже функціею f. Такъ, если всѣ постоянныя, которыя могутъ входить въ f, будутъ вещественныя величины, то f' должна быть функціею тождественною съ f, для того, чтобы вещественнымъ значеніямъ p и q всегда соотвѣтствовали вещественныя величины P и Q; въ обратномъ же случаѣ f' будетъ только тѣмъ отличаться отъ f, что въ мнимыхъ элементахъ, заключающихся въ сей послѣдней функціи, нужно поставить $-i$ вмѣсто i.

Затѣмъ, будемъ имѣть:

$$P = \frac{1}{2} f(p + iq) + \frac{1}{2} f'(p - iq)$$

$$iQ = \frac{1}{2} f(p + iq) - \frac{1}{2} f'(p - iq)$$

а такъ какъ f можетъ быть выбрана какъ угодно (даже съ постоянными мнимыми величинами), то будетъ тоже самое если скажемъ, что P равняется вещественной части функціи $f(p + iq)$, а iQ (при второмъ рѣшеніи $-iQ$) равняется мнимой части той же функціи; откуда, посредствомъ исключенія, можно будетъ выразить T и U въ зависимости отъ t и u. Таковое выраженье и послужитъ вполнѣ общимъ и полнымъ рѣшеніемъ требуемаго вопроса.

6. Если $p' + iq'$ представляетъ произвольную, опредѣленную функцію отъ $p + iq$, причемъ p', q' суть вещественныя функціи отъ p, q, то

$$p' + iq = \text{Const и } p' - iq' = \text{Const}$$

будутъ также интегралами дифференціальнаго уравненія $\omega = 0$; въ самомъ дѣлѣ, эти выраженья совершенно однозначащи съ вышеприведенными интегралами:

$$p + iq = \text{Const и } p - iq = \text{Const}$$

Точно также

$$P' + iQ' = \text{Const и } P' - iQ' = \text{Const}$$

будутъ интегралами дифференціальнаго уравненія $\Omega = 0$, и имѣютъ такое же значеніе, какъ вышеприведенные интегралы:

$$P + iQ = \text{Const и } P - iQ = \text{Gonst}$$

если только $P' + iQ'$ представляетъ произвольную, опредѣленную функцію отъ $P + iQ$ (причемъ P', Q' суть вещественныя функціи отъ P, Q). Изъ сказаннаго явствуетъ, что въ общемъ рѣшеніи нашей задачи, данномъ въ предыдущемъ параграфѣ, можно замѣнить p и q величинами p' и q', а вмѣсто P, Q ввести P', Q'. Хотя измѣненія такого рода не могутъ придать рѣшенію большей общности, но въ практикѣ будетъ иногда удобнѣе предпочесть для извѣстной цѣли одну форму другой.

7. Обозначимъ функціи, происходящія отъ дифференцированія произвольныхъ функцій f и f', черезъ φ и φ', такъ что

$$dfv = \varphi v dv, \quad df'v = \varphi' v dv.$$

Тогда, на основаніи нашего общаго рѣшенія, будемъ имѣть:

$$\frac{dP + idQ}{dp + idq} = \varphi(p + iq), \frac{dP - idQ}{dp - idp} = \varphi'(p - iq)$$

откуда

$$\frac{mmn}{N} = \varphi(p + iq)\varphi'(p - iq)$$

Такъ что для опредѣленія масштаба послужитъ слѣдующая формула:

$$m = \sqrt{\left\{\frac{dp^2 + dq^2}{\omega} \cdot \frac{\Omega}{dP^2 + dQ^2} \cdot \varphi(p + iq)\varphi'(p - iq)\right\}}$$

8. Поясним теперь наше общее рѣшеніе нѣкоторыми примѣрами, которые покажутъ, какъ оно прилагается въ практикѣ, и послужатъ вмѣстѣ съ тѣмъ къ указанію на нѣкоторыя встрѣчающіяся при этомъ обстоятельства.

Положимъ, вопервыхъ, что обѣ поверхности суть плоскости, такъ что можно принять

$$x = t,\ \ y = u,\ \ z = 0$$
$$X = T,\ Y = U,\ Z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ выраженья:

$$t + iu = \text{Const},\ \ t - iu = \text{Const}\ \ \text{и}$$
$$T + iU = \text{Const},\ \ T - iU = \text{Const}$$

будутъ соотвѣтственно интегралами дифференціальныхъ уравненій

$$\omega = dt^2 + du^2 = 0\ \ \text{и}$$
$$\Omega = dT^2 + dU^2 = 0$$

Итакъ, два общія рѣшенія задачи будутъ:

$$\text{I.}\quad T + iU = f(t + iu),\ \ T - iU = f'(t - iu)$$
$$\text{II.}\quad T + iU = f(t - iu),\ \ T - iU = f'(t + iu)$$

А такъ какъ характеристика f означаетъ произвольную функцію, то полученный выводъ можетъ быть выраженъ еще слѣдующимъ образомъ: для X слѣдуетъ принять вещественную часть $f(x + iy)$, а для Y и для $-Y$ мнимую часть той же функціи, безъ множителя i.

Если придадимъ характеристикамъ φ, φ' такія значенія, какъ въ § 7, и положимъ

$$\varphi(x + iy) = \xi + i\eta,\ \ \varphi'(x - iy) = \xi - i\eta$$

гдѣ, очевидно, ξ и η суть вещественныя функціи отъ x и y, то для перваго рѣшенія будемъ имѣть

$$dX + idY = (\xi + i\eta)\ (dx + idy)$$
$$dX - idY = (\xi - i\eta)\ (dx - idy)$$

и слѣдовательно

$$dX = \xi dx - \eta dy$$
$$dY = \eta dx + \xi dy.$$

Далѣе, пусть ds означаетъ линейный элементъ на первой поверхности, g уголъ, заключающійся между этимъ элементомъ и линіей абсциссъ, dS соотвѣтствующій линейный элементъ на второй поверхности, а G наклоненіе онаго къ линіи абсциссъ, и положимъ:

$$\xi = \sigma\,.\cos\gamma\ ,\quad \eta = \sigma\,.\sin\gamma$$
$$dx = ds\,.\cos g\ ,\ \ dy = ds\,.\sin g$$
$$dX = dS\,.\cos G\,,\ dY = dS\,.\sin G$$

тогда предыдущія уравненія даютъ:

$$dS \,.\, \cos G = \sigma \,.\, ds \,.\, \cos(g + \gamma)$$
$$dS \,.\, \sin G = \sigma \,.\, ds \,.\, \sin(g + \gamma)$$

А такъ какъ мы вправѣ считать σ положительною величиною, то

$$dS = \sigma \,.\, ds \qquad G = g + \gamma$$

Отсюда видно, что величина σ (согласно съ § 7) представляетъ отношеніе величины элемента ds къ величинѣ элемента изображенія dS, и, какъ должно быть, этотъ масштабъ не зависитъ отъ g. Уголъ γ тоже не зависитъ отъ g, откуда слѣдуетъ, что соотвѣтствующіе элементы линій, исходящихъ изъ той же точки, образуютъ на обѣихъ поверхностяхъ равные углы и, притомъ, въ томъ же направленіи.

Если для f выберемъ линейную функцію

$$fv = A + Bv$$

постоянные коэфиціенты которой имѣютъ видъ

$$A = a + bi, \;\; B = c + ei$$

то $\qquad \varphi v = B = c + ei$

слѣдовательно $\qquad \sigma = \sqrt{(cc + ee)}, \;\; \gamma = Arc.\ tang\ \frac{e}{c}$

Итакъ, масштабъ постояненъ во всѣхъ точкахъ, такъ что изображеніе совершенно подобно изображаемой фигурѣ.

Для всякой другой функціи f легко доказать, что масштабъ не будетъ постояненъ, а потому подобіе сохранится только въ безконечно малыхъ частяхъ.

Если опредѣленному числу точекъ, данныхъ на первой поверхности, должны соотвѣтствовать извѣстныя мѣста на поверхности изображенія, то не трудно найти по простой интерполяціи самую простую алгебраическую функцію f, удовлетворяющую принятому условію. Обозначивъ значенія $x + iy$, относящіяся къ даннымъ точкамъ, чрезъ a, b, c и т. д., а соотвѣтствующія значенія $X + iY$ чрезъ A, B, C и т. д., будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$fv = \frac{(v-b)(v-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots} \,.\, A + \frac{(v-a)(v-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots} \,.\, B + \frac{(v-a)(v-b)\ldots}{(c-a)(c-b)\ldots} \,.\, C + etc.$$

Выраженье это есть алгебраическая функція отъ v, и порядокъ ея единицей меньше, противъ числа назначенныхъ точекъ; такъ что для двухъ таковыхъ точекъ эта функція дѣлается линейною, а потому изображенія будутъ совершенно подобны между собою.

Только-что изложенное дѣйствіе можетъ быть съ удобствомъ примѣнено въ геодезіи въ томъ случаѣ, когда имѣется карта хорошая въ частностяхъ, но искаженная въ общемъ своемъ видѣ. Имѣя точное положеніе нѣкоторыхъ точекъ, предыдущее рѣшеніе дастъ возможность исправить всю карту; только не слѣдуетъ, однакожь, значительно переступать тѣ границы, въ коихъ даны точно опредѣленные пункты.

Доведя до конца *второе рѣшеніе* точно такъ же, какъ было сдѣлано съ первымъ, окажется, что единственною разностью между ними будетъ обратное подобіе между изображеніями, такъ что въ этомъ второмъ рѣшеніи элементы изображеній будутъ составлять между собой такіе же углы, какъ и элементы изображаемой фигуры, только въ обратномъ направленіи; а потому то, что лежало при первомъ рѣшеніи справа, представится, въ настоящемъ случаѣ, слѣва. Различіе это вовсе не существенное и исчезаетъ, если верхнюю сторону одной изъ плоскостей принять за нижнюю. А такъ какъ такое же замѣчаніе можетъ быть отнесено ко всѣмъ тѣмъ случаямъ, когда одна изъ поверхностей есть плоскость, то, въ послѣдующихъ примѣрахъ такого рода, мы ограничимся однимъ первымъ рѣшеніемъ

9. Для втораго примѣра, разсмотримъ изображеніе прямаго цилиндра на плоскости. Уравненіе цилиндра пусть будетъ

$$xx + yy - kk\,zz = 0$$

Положимъ въ ономъ

$$x = kt \cos u$$
$$y = kt \sin u$$
$$z = t$$

и сверхъ того, какъ выше, пусть $X = T$, $Y = U$, $Z = 0$ Дифференціальное уравненіе

$$\omega = (kk + 1)\,dt^2 + kk\,tt\,du^2 = o$$

даетъ, въ этомъ случаѣ, слѣдующіе два интеграла:

$$\log t \pm i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u = \text{Const}$$

Слѣдовательно искомое рѣшеніе будетъ:

$$X + i\,Y = f\left(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u\right)$$
$$X - i\,Y = f'\left(\log t - i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u\right)$$

гдѣ f есть произвольная функція, а потому для X надлежитъ принять вещественную часть функціи

$$f(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\; u),$$

а для Y слѣдуетъ взять мнимую часть той же функціи, только безъ множителя i.

Если взять, напримѣръ, для f показательную функцію

$$f\upsilon = he^{\upsilon}$$

въ коей h предполагается постоянной величиной, а e есть основаніе гиперболическихъ логариѳмовъ, то получимъ самое простое изображеніе, а именно будемъ имѣть:

$$X = ht\cos\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u,\; Y = ht\sin\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u$$

Примѣняя къ настоящему случаю формулы § 7, найдемъ:

$$n = (kk+1)\,tt$$
$$N = 1$$

и на основаніи равенствъ $\varphi\upsilon = \varphi'\upsilon = he^{\upsilon}$

$$\varphi\,(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u)\,\varphi'\,(\log t - i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u) = hh\,tt$$

слѣдовательно

$$m = \frac{h}{\sqrt{kk+1}}$$ есть величина постоянная.

Положивъ, сверхъ того, $h = \sqrt{kk+1}$, получимъ изображеніе, которое можетъ слиться съ изображаемой фигурой.

10. Для третьяго примѣра, возьмемъ поверхность шара съ радіусомъ $= a$, и изобразимъ оную на плоскости.

Положимъ теперь

$$x = a\cos t\,.\,\sin u$$
$$y = a\sin t\;\sin u$$
$$z = a\cos u$$

откуда найдемъ

$$\omega = aa\sin u^2\,dt^2 + aa\,du^2$$

Дифференціальное уравненіе $\omega = o$ дастъ

$$dt\,.\mp i\,\frac{du}{\sin u} = o$$

а интегралы этого выраженья будутъ

$$t \pm i\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}u = \text{Const.}$$

А потому, принимая f произвольною функціей, надлежитъ приравнять X вещественной, а Y мнимой части функціи

$$f(t + i \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u).$$

Приведемъ два частныхъ случая этого общаго рѣшенія.

Взявъ для f линейную функцію $f\upsilon = k\upsilon$ найдемъ

$$X = kt, \quad Y = k \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u$$

Не трудно видѣть, что для земнаго шара рѣшеніе это даетъ ничто иное, какъ проэкцію Меркатора. Для масштаба будемъ имѣть въ этомъ случаѣ, опять по § 7,

$$m = \frac{k}{a \sin u.}$$

Если для f принять какую-либо мнимую, показательную функцію, положимъ, первоначально, простѣйшую, именно $f\upsilon = ke^{i\upsilon}$, тогда

$$f(t + i \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u) = ke^{\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} u + it} = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u (\cos t + i \sin t)$$

откуда

$$X = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u . \cos t, \quad Y = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u . \sin t$$

Легко видѣть, что мы пришли къ стереографической проэкціи.

Въ болѣе общемъ видѣ, положимъ $f\upsilon = ke^{i\upsilon\lambda}$, тогда

$$X = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u^\lambda . \cos \lambda t, \quad Y = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u^\lambda . \sin \lambda t$$

Для масштаба будемъ имѣть, въ этомъ случаѣ:

$$n = aa \sin u^2, \; N = 1, \; \varphi\upsilon = i\lambda k e^{i\lambda\upsilon}$$

откуда

$$m = \frac{\lambda k \operatorname{tg} \frac{1}{2} u^\lambda}{a \sin u}$$

Изъ этого видно, что всѣ точки, для которыхъ u постоянно, изобразятся кругомъ, а тѣ, для которыхъ t постоянно, представятся прямою линіею; и, сверхъ того, круги, соотвѣтствующіе различнымъ значеніямъ u, будутъ имѣть всѣ одинъ центръ. Таковое перенесеніе можетъ послужить весьма удобною проэкціей картъ въ томъ случаѣ, когда требуется изобразить часть поверхности шара; и при этомъ всего лучше выбрать λ такъ, чтобы масштабъ былъ тотъ же самый для крайнихъ значеній u, вслѣдствіе чего значеніе этого масштаба въ серединѣ полосы будетъ наименьшимъ.