

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} = 0$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} = 0$$

$$X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} = 0$$

Сопротивление материалов на базе **MATHCAD**

- Полный объем теоретических сведений
- Практические расчеты
- Решение сложных задач в Mathcad
- 40 универсальных программ по всем разделам курса на компакт-диске



УДК 681.3.06(0.75.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
М15

Макаров Е. Г.

М15 Сопротивление материалов на базе Mathcad. — СПб.:
БХВ-Петербург, 2004. — 512 с.: ил.
ISBN 5-94157-498-3

Курс сопротивления материалов дополнен сведениями о физике и механике хрупкого и пластического разрушения материалов. Углубленно рассматриваются расчеты в упругопластической области, усталость материалов, динамические расчеты. В каждой главе приводится решение сложных задач в пакете Mathcad. Все расчетные программы позволяют решить целый класс задач, проанализировать результаты расчета, выбрать оптимальный вариант. К книге прилагается компакт-диск с 40 универсальными программами по всем разделам курса сопротивления материалов, предназначенными для самостоятельной работы студентов.

*Для студентов и преподавателей технических вузов,
инженеров и научных работников*

УДК 681.3.06(0.75.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Алексей Семенов</i>
Компьютерная верстка	<i>Ольга Сергиенко</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн обложки	<i>Игоря Цырульников</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.09.04.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 41,28.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-498-3

© Макаров Е. Г., 2004
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2004

Содержание

Предисловие	10
Особенности курса сопротивления материалов.....	10
Особенности решения задач в Mathcad.....	12
Глава 1. Основные понятия.....	15
1.1. Реальный объект и расчетная схема	15
1.2. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов.....	16
1.3. Силы внешние и внутренние	17
1.4. Определение внутренних усилий методом сечений.....	17
1.5. Напряжения.....	21
1.6. Условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий.....	22
1.7. Деформации.....	23
1.7.1. Типы деформаций.....	24
1.8. Потенциальная энергия упругой деформации.....	25
1.9. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов	27
1.10. Условие прочности	30
1.11. Виды опор, используемые в схемах сопротивления материалов	31
1.12. Статически определимые и статически неопределимые системы	32
1.13. Цели и задачи сопротивления материалов.....	34
1.14. Неучитываемые факторы.....	35
1.14.1. Концентрация напряжений	36
1.14.2. Изменение механических свойств материала	37
1.14.3. Вероятность выхода из строя	38
1.14.4. Принцип Сен-Венана.....	38
Глава 2. Геометрические характеристики поперечных сечений	40
2.1. Статические моменты площади сечений	40
2.1.1. Свойства статических моментов площади сечения.....	41
2.1.2. Определение положения центра тяжести	42
2.2. Моменты инерции сечений	44
2.2.1. Свойства моментов инерции	44
2.2.2. Моменты инерции простейших фигур	45
2.2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей	48

2.2.4. Моменты инерции относительно повернутых осей.....	49
2.2.5. Главные оси и главные моменты инерции	51
2.2.6. Радиус инерции сечения.....	52
2.3. Примеры расчета геометрических характеристик сечений	52
2.3.1. Расчет геометрических характеристик сечения произвольной формы	53
2.3.2. Расчет геометрических характеристик составного сечения	57
Глава 3. Определение внутренних усилий.....	61
3.1. Растяжение-сжатие	62
3.2. Кручение.....	66
3.3. Изгиб	69
3.4. Дифференциальные зависимости внутренних усилий от распределенной нагрузки	77
3.4.1. Растяжение-сжатие	77
3.4.2. Кручение	78
3.4.3. Изгиб.....	78
3.4.4. Следствия из дифференциальных зависимостей.....	79
Глава 4. Растяжение-сжатие.....	83
4.1. Внутренние усилия и напряжения.....	83
4.2. Деформации.....	84
4.3. Закон Гука	85
4.4. Потенциальная энергия упругой деформации.....	87
4.5. Напряжения на наклонных площадках	88
4.5.1. Закон парности касательных напряжений	89
4.6. Понятие о главных напряжениях.....	90
4.7. Примеры решения задач на растяжение-сжатие	91
4.7.1. Расчет одного стержня	91
4.7.2. Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы.....	98
Глава 5. Механические характеристики материалов	104
5.1. Признаки хрупкого и пластического разрушения материалов	105
5.2. Диаграмма деформирования мягкой стали	106
5.2.1. Характеристики прочности.....	106
5.2.2. Характеристики пластичности	110
5.2.3. Работа разрушения при разрыве	111
5.2.4. Диаграммы деформирования других материалов	112
5.3. Испытание материалов на сжатие.....	113
5.4. Допускаемые напряжения.....	115
5.5. Диаграммы условных и истинных напряжений	116
5.5.1. Построение диаграммы истинных напряжений	119
5.5.2. Аппроксимация диаграммы деформирования	123
Глава 6. Сдвиг и кручение.....	127
6.1. Сдвиг	127
6.2. Расчет простейших соединений	130
6.2.1. Расчет тяги	131
6.2.2. Расчет штифта (заклепки).....	132

6.2.3. Расчет сварного соединения.....	133
6.2.4. Пример расчета простейших соединений	134
6.3. Кручение стержней круглого поперечного сечения.....	136
6.3.1. Касательные напряжения и угол закручивания.....	137
6.3.2. Потенциальная энергия при кручении стержня.....	142
6.4. Связь между крутящим моментом, мощностью и скоростью вращения вала....	144
6.5. Кручение стержней некруглого поперечного сечения.....	145
6.6. Примеры расчета стержней на кручение.....	147

Глава 7. Плоский поперечный изгиб.....153

7.1. Нормальные напряжения при изгибе балки.....	154
7.1.1. Условие прочности при изгибе	158
7.1.2. Рациональная форма поперечного сечения	160
7.2. Касательные напряжения при изгибе	164
7.2.1. Распределение касательных напряжений в сечениях различной формы	166
7.2.2. Проверка прочности по касательным напряжениям	170
7.3. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе.....	172
7.4. Перемещения при изгибе.....	173
7.4.1. Непосредственное интегрирование уравнения упругой линии балки	174
7.4.2. Метод начальных параметров.....	175
7.5. Пример расчета балки на изгиб	178
7.5.1. Определение внутренних усилий.....	178
7.5.2. Определение напряжений.....	183
7.5.3. Определение перемещений балки	185
7.6. Изгиб кривых брусьев	189
7.6.1. Нормальные напряжения в кривых брусьях	189
7.6.2. Внутренние усилия в кривых брусьях.....	191
7.7. Расчет балок на упругом основании	193

Глава 8. Учет пластических деформаций.....200

8.1. Связь напряжений и деформаций.....	200
8.2. Учет пластических деформаций при растяжении-сжатии.....	201
8.3. Учет упругопластических деформаций при изгибе	204
8.4. Учет пластических деформаций при кручении	213
8.5. Расчеты по предельной нагрузке.....	221
8.6. Понятие о приспособляемости конструкций	230

Глава 9. Основы напряженно-деформированного состояния232

9.1. Деформации.....	232
9.2. Напряжения.....	233
9.3. Виды напряженного состояния.....	236
9.4. Плоское напряженное состояние.....	237
9.4.1. Прямая задача.....	238
9.4.2. Обратная задача.....	241
9.5. Связь напряжений и деформаций. Обобщенный закон Гука.....	244
9.6. Гипотезы прочности и пластичности	246
9.7. Условие прочности при плоском напряженном состоянии.....	253

Глава 10. Сложное сопротивление.....	255
10.1. Внутренние усилия при сложном сопротивлении.....	255
10.1.1. Построение эпюр внутренних усилий	256
10.2. Напряжения	259
10.2.1. Гипотезы.....	259
10.2.2. Нормальные напряжения.....	261
10.2.3. Касательные напряжения.....	262
10.2.4. Условие прочности	262
10.3. Расчет на прочность при сложном сопротивлении.....	263
10.3.1. Стержень произвольного сечения	263
10.3.2. Прямоугольное сечение	264
10.3.3. Круглое или кольцевое сечение	266
10.4. Частные случаи сложного сопротивления.....	267
10.5. Пример расчета стержня при сложном сопротивлении.....	268
Глава 11. Энергетический метод расчета упругих систем	278
11.1. Интеграл Мора	279
11.2. Примеры определения перемещений статически определимых систем	285
11.2.1. Определение перемещений балок при изгибе	285
11.2.2. Определение перемещений пространственной стержневой системы	289
11.3. Метод сил.....	292
11.3.1. Степень статической неопределимости	292
11.3.2. Перемещение от единичной силы (коэффициент податливости)	293
11.3.3. Канонические уравнения метода сил.....	295
11.3.4. Учет монтажных и температурных напряжений	298
11.3.5. Учет симметрии в методе сил.....	299
11.3.6. Проверка правильности решения системы	301
11.3.7. Порядок решения статически неопределимой задачи методом сил.....	301
11.4. Примеры раскрытия статической неопределимости методом сил	302
11.4.1. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы.....	302
11.4.2. Расчет пространственной статически неопределимой рамы	309
11.4.3. Определение перемещений систем из нескольких элементов	317
Глава 12. Устойчивость сжатых стержней	323
12.1. Определение критической силы. Формула Эйлера	325
12.2. Определение критической силы при других видах закрепления	327
12.3. Критические напряжения	328
12.4. Расчет сжатых стержней на устойчивость	329
12.4.1. Условие устойчивости стержня.....	329
12.4.2. Рекомендации к расчету на устойчивость	331
12.4.3. Пример расчета стержня на устойчивость.....	332
12.5. Энергетический метод определения критической силы.....	335
12.5.1. Вывод формулы Рэлея.....	335
12.5.2. Примеры определения критической силы энергетическим методом.....	338
12.6. Продольно-поперечный изгиб.....	343
12.6.1. Уравнение упругой линии стержня	343
12.6.2. Примеры расчета балок на продольно-поперечный изгиб.....	344

Глава 13. Расчет тонкостенных оболочек.....	349
13.1. Безмоментная теория тонкостенных оболочек.....	349
13.1.1. Гипотезы и допущения	349
13.1.2. Формула Лапласа.....	351
13.1.3. Частные случаи тонкостенных оболочек.....	354
13.1.4. Расчет на прочность	356
13.2. Расчет распорного кольца.....	356
13.3. Деформация трубы под давлением.....	358
13.4. Краевой эффект.....	358
13.5. Пример расчета тонкостенной оболочки	362
Глава 14. Динамика упругих систем	368
14.1. Учет сил инерции при движении тела.....	369
14.2. Колебания упругой системы.....	370
14.2.1. Уравнение движения системы с одной степенью свободы	371
14.2.2. Свободные затухающие колебания.....	373
14.2.3. Опытное определение коэффициента затухания колебаний	375
14.3. Определение собственной частоты системы с одной степенью свободы	376
14.3.1. Собственная частота системы без учета ее массы.....	376
14.3.2. Собственная частота системы с учетом ее массы	377
14.3.3. Собственная частота при крутильных колебаниях	379
14.3.4. Замечания к расчету собственных частот колебаний	379
14.4. Ударная нагрузка.....	381
14.4.1. Вертикальный удар	381
14.4.2. Горизонтальный удар.....	383
14.4.3. Крутящий удар	384
14.4.4. Замечания к расчетам на ударную нагрузку.....	385
14.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	386
14.5.1. Импульс силы	386
14.5.2. Произвольная нагрузка	387
14.5.3. Критическая скорость вращения вала.....	388
14.6. Примеры динамического расчета	389
14.6.1. Расчет балок на удар и колебания.....	389
14.6.2. Расчет сложной системы на удар и устойчивость.....	399
Глава 15. Усталость материалов.....	405
15.1. Механизм усталостного разрушения.....	405
15.2. Характеристики цикла нагружения.....	407
15.3. Диаграммы усталостной прочности	410
15.3.1. Усталостная кривая.....	410
15.3.2. Диаграмма предельных амплитуд	414
15.4. Суммирование повреждений при нестационарной нагрузке	415
15.5. Факторы, влияющие на предел выносливости	418
15.5.1. Концентрация напряжений.....	418
15.5.2. Размеры детали	420
15.5.3. Состояние поверхности.....	421

15.5.4. Влияние коррозии	423
15.5.5. Влияние температуры	423
15.6. Предел выносливости детали	424
15.7. Расчет на усталостную прочность	425
15.8. Примеры расчетов на усталостную прочность	427
15.8.1. Статистическая обработка результатов эксперимента	427
15.8.2. Приближенное построение диаграмм усталостной прочности	429
15.8.3. Определение размеров детали	431
15.8.4. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении	435
15.9. Понятие о малоцикловой усталости	439

Глава 16. Природа разрушения твердых тел442

16.1. Природа упругой деформации	442
16.2. Теоретическая прочность твердых тел	443
16.3. Реальная прочность. Роль дефектов структуры	445
16.4. Виды дислокаций	445
16.5. Размножение дислокаций	448
16.6. Механизмы упрочнения	449
16.6.1. Упрочнение за счет уменьшения размеров зерен	449
16.6.2. Упрочнение легированием твердых растворов	450
16.6.3. Упрочнение за счет выделения дисперсных частиц при старении	450
16.7. Механизм больших пластических деформаций	451
16.7.1. Механизмы образования трещин	452
16.8. Механизмы роста трещин	452
16.9. Механизмы пластического разрушения	453
16.10. Механизм хрупкого разрушения	453

Глава 17. Факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов455

17.1. Скорость деформации	455
17.2. Температура эксплуатации	456
17.3. Переход от пластического разрушения к хрупкому	457
17.3.1. Критическая температура хрупкости как критерий общего запаса вязкости	459
17.4. Напряженное состояние	459
17.5. Остаточные напряжения	461

Глава 18. Линейная механика разрушения тел с трещинами464

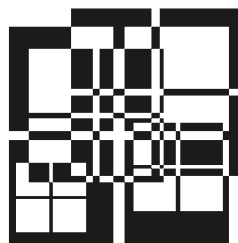
18.1. Основные гипотезы	464
18.2. Критерии трещиностойкости	469
18.2.1. Силовой критерий трещиностойкости	469
18.3. Живучесть конструкций	472

Глава 19. Рациональное и оптимальное проектирование477

19.1. Выбор рациональной конструкции	477
19.2. Выбор критериев оптимизации	479
19.3. Примеры поиска оптимальных решений	481
19.3.1. Расчет кронштейна	481

19.3.2. Расчет сферической крышки.....	484
19.3.3. Подбор нагрузок по перемещениям балки.....	486
19.3.4. Поиск оптимальных размеров сечения балки	491
Приложение 1. Самостоятельная работа с программами	493
Приложение 2. Описание компакт-диска	502
Список литературы	507
Предметный указатель	509

ГЛАВА 2



Геометрические характеристики поперечных сечений

Известны три геометрические характеристики, знакомые каждому, — это длина, площадь, объем, которые имеют определенный физический смысл. В этой главе рассмотрим новые характеристики, которые будут использоваться в расчетных формулах сопротивления материалов: статические моменты и моменты инерции площади сечений. Эти характеристики не имеют физического смысла. Их нельзя измерить. При выводе формул сопротивления материалов иногда случается, что часть формулы представляет собой интегральное выражение, зависящее только от формы и размеров сечения. Для упрощения последующего использования этих формул удобно такое выражение подсчитать заранее для различных форм сечений.

Статические моменты площади сечений используются при определении положения центра тяжести сечения, при расчете касательных напряжений при изгибе.

Моменты инерции используются при расчете напряжений и перемещений при изгибе и при кручении и т. д.

2.1. Статические моменты площади сечений

Статическими моментами площади сечений называются интегралы следующего вида:

$$\begin{aligned} S_y &= \int_A z dA, \\ S_z &= \int_A y dA. \end{aligned} \tag{2.1}$$

У статических моментов нет физического смысла, но есть геометрическая интерпретация.

Рассмотрим сечение произвольной формы (рис. 2.1).

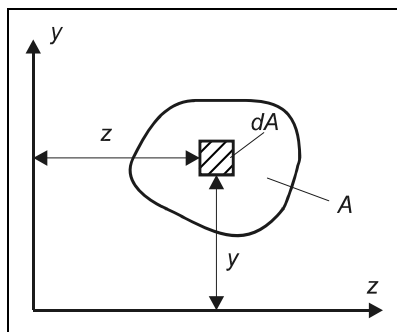


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация статических моментов площади сечений

Выделим в сечении элементарную площадку dA с координатами y и z . Произведение площади dA на координату y есть элементарный статический момент dS_z относительно оси z . Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что A — это вес пластины, имеющей форму нашего сечения, то статический момент S_z — это момент силы тяжести пластины относительно оси z .

2.1.1. Свойства статических моментов площади сечения

□ Размерность статических моментов — $[\text{длина}^3]$, обычно $[\text{м}^3]$ или $[\text{см}^3]$.

□ Статические моменты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*.

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*.

□ Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения.

Это вытекает из свойств определенного интеграла, который можно вычислять по частям (в нашем случае по частям площади A).

2.1.2. Определение положения центра тяжести

Рассмотрим изменение статического момента при параллельном переносе осей координат (рис. 2.2). Расстояние между старыми и новыми осями координат обозначим a и b . Пусть известны статические моменты относительно старых осей координат $z-y$. Найти статические моменты относительно параллельно перенесенных осей координат z_1-y_1 .

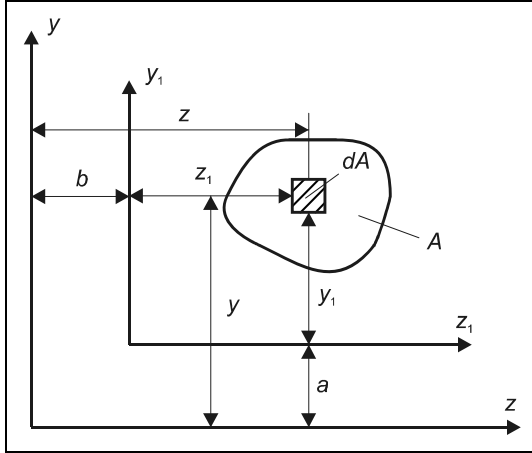


Рис. 2.2. К определению статических моментов относительно параллельно перенесенных осей

По определению: $S_{z_1} = \int_A y_1 dA$, $S_{y_1} = \int_A z_1 dA$.

Выделим элементарную площадку dA и запишем связь между координатами площадки в старой и новой системах координат: $z_1 = z - b$, $y_1 = y - a$.

Тогда $S_{z_1} = \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - a \int_A dA = S_z - aA$.

Аналогично $S_{y_1} = \int_A (z - b) dA = \int_A z dA - b \int_A dA = S_y - bA$.

Найдем, на сколько надо сместить оси, чтобы они стали центральными.

$$S_{z_1} = S_z - aA = 0, \quad a = y_c = \frac{S_z}{A},$$

$$S_{y_1} = S_y - bA = 0, \quad b = z_c = \frac{S_y}{A}.$$

Здесь y_c и z_c — координаты центра тяжести, но найти их пока нельзя, ведь S_z и S_y неизвестны.

Чтобы найти их, используем способ Мюнхгаузена, который за волосы вытащил сам себя из болота.

Если не известны координаты центра тяжести всего сечения, то разобьем его на такие элементы, для которых эти координаты известны без расчетов, это — прямоугольник, круг, треугольник.

На рис. 2.3 сечение разбито на три прямоугольника. Статический момент каждого элемента найдем по предыдущей формуле: $S_z = y_c \cdot A$ и $S_y = z_c \cdot A$.

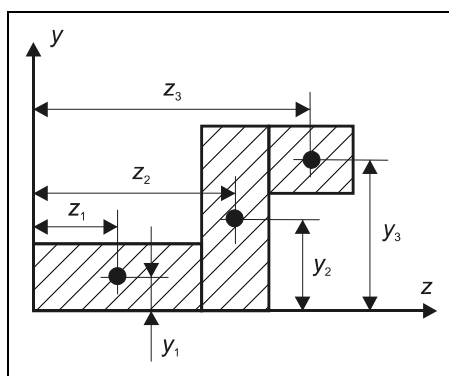


Рис. 2.3. Определение статических моментов составной фигуры

Суммарный статический момент всего сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения (по третьему свойству статических моментов)

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} + S_{z3} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 ,$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = A_{y1} \cdot z_1 + A_{y2} \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 .$$

или $S_z = \sum S_{z_i}$ и $S_y = \sum S_{y_i}$.

Координаты центра тяжести всего сечения

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \text{ и } y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} , \quad (2.2)$$

где y_i , z_i и A_i — координаты центра тяжести и площадь элементов, на которые разбито сечение, n — количество таких элементов.

2.2. Моменты инерции сечений

Моментами инерции сечений называются интегралы следующего вида:

$$J_y = \int_A z^2 dA \text{ — осевой момент инерции сечения относительно оси } y;$$

$$J_z = \int_A y^2 dA \text{ — осевой момент инерции сечения относительно оси } z;$$

$$J_{yz} = \int_A yz dA \text{ — центробежный момент инерции сечения};$$

$$J_p = \int_A \rho^2 dA \text{ — полярный момент инерции сечения.}$$

(2.3)

2.2.1. Свойства моментов инерции

- Размерность моментов инерции — [длина⁴], обычно [м⁴] или [см⁴].
- Осевые и полярный моменты инерции всегда положительные. Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равным нулю.
Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции* сечения.
Оси симметрии всегда главные. Если из двух осей хотя бы одна является осью симметрии, то обе оси главные.
- Момент инерции составного сечения равен сумме моментов инерции элементов этого сечения.
- Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Докажем последнее свойство. В сечении площадью A для элементарной площадки dA радиус-вектор ρ и координаты y и z (рис. 2.4) связаны по теореме Пифагора $\rho^2 = y^2 + z^2$.

Тогда

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y. \quad (2.4)$$

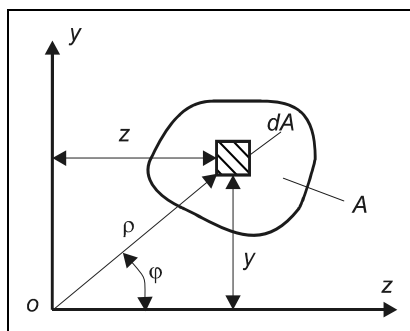


Рис. 2.4. Связь полярных и декартовых координат элементарной площадки

2.2.2. Моменты инерции простейших фигур

В этом разделе получим формулы для моментов инерции относительно собственных центральных осей простейших фигур: прямоугольника, круга, треугольника.

Прямоугольник

В прямоугольном сечении (рис. 2.5) выберем элементарную площадку dA с координатами y и z и площадью $dA = dy \cdot dz$.

Осевой момент инерции относительно оси y

$$J_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dy \cdot dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) z^2 dz = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{hb^3}{12}.$$

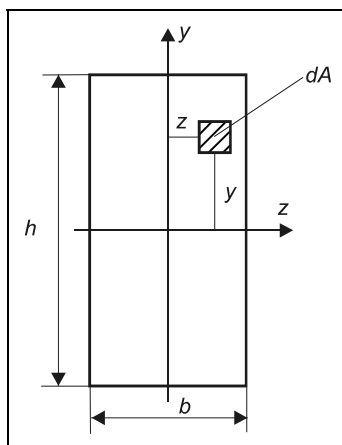


Рис. 2.5. К определению моментов инерции прямоугольного сечения

Аналогично получаем момент инерции относительно оси z : $J_z = \frac{bh^3}{12}$.

Поскольку y и z — оси симметрии, то центробежный момент $J_{zy} = 0$.

Круг и кольцо

Для круга диаметром d вычисления упрощаются, если использовать круговую симметрию. Возьмем в качестве элементарной площадки бесконечно тонкое кольцо с радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (рис. 2.6). Его площадь $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда полярный момент инерции

$$J_p = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

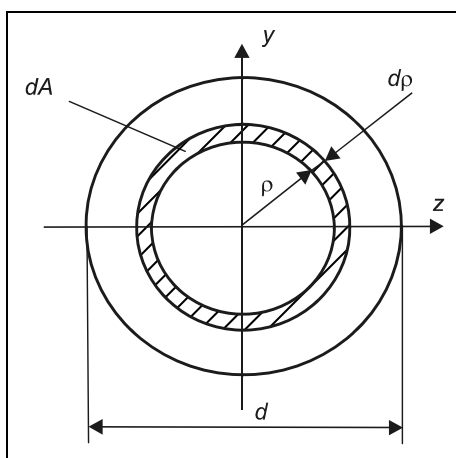


Рис. 2.6. К определению моментов инерции круга

Ввиду круговой симметрии осевые моменты инерции относительно любой центральной оси одинаковы.

$$J_y = J_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$

Момент инерции кольца находим как разность моментов инерции двух кругов:

$$J_y = J_{yD} - J_{yd} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4),$$

$$J_p = 2J_y = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^4 (1 - \alpha^4),$$

где $\alpha = \frac{d}{D}$.

Момент инерции треугольника

Найдем момент инерции треугольника относительно центральной оси z_0 , параллельной основанию (рис. 2.7). Выделим элементарную площадку dA , параллельную основанию

$$dA = b(y) \cdot dy.$$

Из подобия треугольников $\frac{\frac{2}{3}h - y}{h} = \frac{b(y)}{b}$.

Откуда $dA = \left(\frac{2}{3}b - \frac{b}{h}y \right) dy$.

Момент инерции J_z вычисляем с помощью Mathcad символьным путем (рис. 2.8).

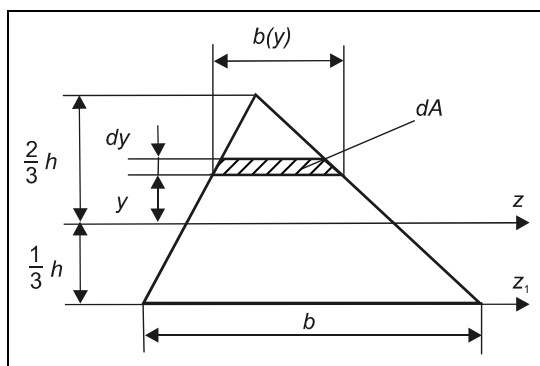


Рис. 2.7. К определению момента инерции треугольника

$$J_z(b, h) := \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2 \cdot \frac{h}{3}}{3}} y^2 \left(\frac{2}{3}b - \frac{b \cdot y}{h} \right) dy \rightarrow \frac{1}{36} \cdot h^3 \cdot b \quad J_z(b, h) \rightarrow \frac{1}{36} \cdot h^3 \cdot b$$

Рис. 2.8. Символьное вычисление момента инерции треугольника

В формуле для J_z параметры можно не писать. Результат будет тот же, но выражение окрасится в красный цвет. Численное вычисление — запрещено, символьное — возможно. Формулы для расчета моментов инерции сечений различной формы можно найти в справочнике [12].

2.2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции относительно центральных осей z_0 и y_0 для сечения площадью A . Найти моменты инерции относительно осей z_1 и y_1 , перенесенных параллельно z_0 и y_0 на расстояния a и b (рис. 2.9).

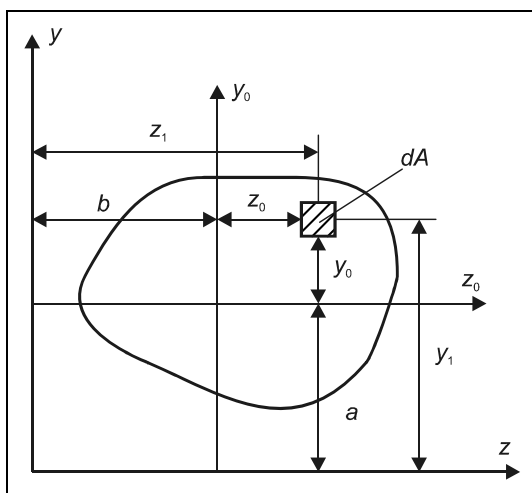


Рис. 2.9. К определению моментов инерции относительно параллельных осей

Запишем связь между координатами элементарной площадки dA в старой и новой системах координат:

$$z_1 = z_0 + b \quad y_1 = y_0 + a.$$

Подставим выражения для координат z_1 и y_1 в формулу моментов инерции

$$J_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z_0 + b)^2 dA = \int_A z_0^2 dA + 2b \int_A z_0 dA + b^2 \int_A dA = J_{y_0} + b^2 A + 2bS_{y_0},$$

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y_0 + a)^2 dA = \int_A y_0^2 dA + 2a \int_A y_0 dA + a^2 \int_A dA = J_{z_0} + a^2 A + 2aS_{z_0},$$

$$\begin{aligned}
 J_{z_1 y_1} &= \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z_0 + b)(y_0 + a) dA = \int_A z_0 y_0 dA + b \int_A y_0 dA + a \int_A z_0 dA + ab \int_A dA = \\
 &= J_{z_0 y_0} + abA + bS_{z_0} + aS_{y_0},
 \end{aligned}$$

где $S_{z_0} = 0$ и $S_{y_0} = 0$ как статические моменты относительно центральных осей z_0 и y_0 .

Окончательно формулы для моментов инерции относительно параллельно перенесенных осей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 J_{y_1} &= J_{y_0} + b^2 A \\
 J_{z_1} &= J_{z_0} + a^2 A \\
 J_{z_1 y_1} &= J_{z_0 y_0} + abA
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Осевой момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс квадрат расстояния между осями.

Надо иметь в виду, что относительно центральных осей моменты инерции имеют минимальные значения. Если решается обратная задача: зная моменты инерции относительно какой-либо оси, найти моменты инерции относительно центральных осей, то в формулах (2.5) появляется знак минус вместо плюса.

2.2.4. Моменты инерции относительно повернутых осей

Пусть известны моменты инерции относительно осей z и y для сечения площадью A . Найти моменты инерции относительно осей u и v , повернутых относительно осей z и y на угол α (рис. 2.10).

Запишем связь между координатами элементарной площадки dA в старой и новой системах координат:

$$u = y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \quad v = y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha).$$

Подставим выражения для координат u и v в формулу моментов инерции:

$$\begin{aligned}
 J_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha))^2 dA = \cos^2 \int_A y^2 dA - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \int_A zy dA + \\
 &+ \sin^2(\alpha) \int_A z^2 dA = J_z \cos^2(\alpha) + J_y \sin^2(\alpha) - J_{zy} \sin(2\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))^2 dA = \sin^2 \int_A y^2 dA + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \int_A zy dA + \\
&\quad + \cos^2(\alpha) \int_A z^2 dA = J_z \sin^2(\alpha) + J_y \cos^2(\alpha) + J_{zy} \sin(2\alpha) \\
J_{uv} &= \int_A uv dA = \int_A (y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))(y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha)) dA = \\
&= \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \int_A zy dA = \\
&= \frac{J_z - J_y}{2} \sin(2\alpha) + J_{zy} \cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

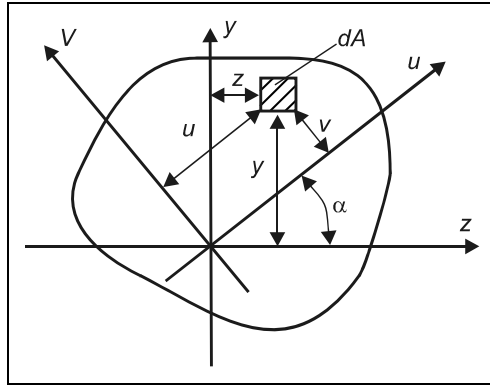


Рис. 2.10. К определению моментов инерции относительно повернутых осей

После упрощения формулы для моментов инерции относительно повернутых осей имеют вид:

$$\begin{aligned}
J_u &= J_z \cos^2(\alpha) + J_y \sin^2(\alpha) - J_{zy} \sin(2\alpha), \\
J_v &= J_z \sin^2(\alpha) + J_y \cos^2(\alpha) + J_{zy} \sin(2\alpha), \\
J_{uv} &= \frac{J_z - J_y}{2} \sin(2\alpha) + J_{zy} \cos(2\alpha).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Отметим, что если сложить первое и второе из выражений (2.6), то

$$J_u + J_v = J_z + J_y. \tag{2.7}$$

Сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется.