Вадим Дунаев

Занимательная математика

Множества и отношения

bhv

Вадим Дунаев

Занимательная математика

множества и отношения

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2008

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26
Д83

Дунаев В. В.

Д83 Занимательная математика. Множества и отношения. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 336 с.: ил.

ISBN 978-5-94157-988-4

Книга в занимательной форме вводит читателя в мир математики и логики. Она адресована всем, кто любит поразмышлять и интересуется головоломками и парадоксами. Материал первой части изложен в форме диалогов Профессора, Простака и Зануды. На занимательных примерах и задачах читатель приобщается к алгебре логики и элементам теории множеств и постоянно встречается с парадоксальными ситуациями, пытаясь их разрешить. Для всех предлагаемых задач приведены развернутые решения. Во второй части рассказывается о теории отношений и ее применении к таким практическим вещам, как реляционные базы данных и классификационная деятельность.

Для широкого круга читателей

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Игорь Шишигин*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Татьяна Темкина*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Инны Тачиной*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.09.07.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,09.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-94157-988-4

Оглавление

ЧАСТЬ I

И В ШУТКУ, И ВСЕРЬЕЗ

Уважаемые Простак и Зануда, идя навстречу вашим неоднократным просьбам, я наконец-то нашел время и силы, чтобы встретиться с вами для беседы о математике. Прежде чем начать говорить по существу, я предлагаю рассмотреть несколько задач, которые следует отнести скорее к головоломкам, чем к классу математических задач, хотя их связь с математикой лежит на поверхности рассуждений и не требует особой проницательности, чтобы увериться в этом. Моя задача сейчас состоит в том, чтобы настроить вас на некоторую информационную волну, необходимую вам для облегчения последующего активного восприятия предлагаемого мной материала. Мой монолог вы можете в любое время прервать, чтобы задать вопрос или высказать собственное мнение по обсуждаемой теме. В результате возникшего диалога мы, быть может, скорее достигнем цели — понимания не только постановки и метода решения конкретной задачи, но и самого духа математики.

Глава 1

Головоломки и задачи

Знание только тогда знание, когда оно приобретено усилиями мысли, а не памятью.

Л. Толстой

1.1. Арифметические задачи

1.1.1. Треть равна половине?

Профессор. Рассмотрим следующую задачу: каковы числа, треть от которых равна половине?

Простак. Я вижу, что это — математическая задача, ответ на которую не очевиден. Сначала, признаюсь, я подумал, что это ноль, но это было бы слишком просто, чтобы походить на истину. Вы же, Профессор, недаром задали нам эту головоломку. Если для решения задачи потребуется составить какое-нибудь уравнение, то я готов увидеть его на бумаге, но сам не хотел бы тратить время на его выписывание. Я согласен, что здесь есть загвоздка, но меня больше интересует правильный ответ, чем возня с его поиском. Просто я многое забыл из школьной математики и сразу мне не вспомнить. Все же непонятно: как может быть, чтобы меньшая часть была равна большей части? Сдается мне, *что эта задача вообще не имеет решения*.

Зануда. Оставим эмоции. Следуя духу математики, надо попытаться составить уравнение. Обозначим искомое число через x. Тогда уравнение, соответствующее формулировке задачи, будет иметь следующий вид:

$$x/2 = x/3.$$

Очевидно, если в это уравнение вместо x подставить 0, то получим тождество $0 = 0$ и, следовательно, искомое число равно нулю, о чем и догадывался Простак. Я же не остановился на догадках, а просто вычислил решение, используя математический метод.

П р о ф е с с о р. Действительно, число ноль обладает тем свойством, что любая его часть всегда равна любой его части. Зная это, можно было и не составлять никаких уравнений, чтобы найти решение. Но может быть существуют и другие числа, отличные от нуля, соответствующие решению поставленной задачи?

З а н у д а. Из моего уравнения таких чисел найти нельзя. Похоже, что их и не существует.

П р о с т а к. В твоем уравнении, Зануда, можно сократить левую и правую части на x, получив неверное тождество $1/3 = 1/2$. Так что твой результат $x = 0$ был обнаружен только благодаря тому, что ты начал с подстановок чисел в свое уравнение вместо x, а не попытался прежде упростить само уравнение, как обычно это все делают. Иначе говоря, тебе просто повезло. Тем не менее, мы до сих пор не знаем, существуют ли отличные от нуля числа, треть от которых равна половине.

З а н у д а. Сокращать на x можно только в том случае, если x не равен 0. Напомню Простаку, что на ноль делить нельзя, поскольку результат деления не определен. Допустим, x не равен 0. Тогда после сокращения на x мое уравнение примет вид $1/3 = 1/2$, что, очевидно, неверно. Отсюда заключаем, что верно обратное, а именно, что $x = 0$. Более того, мы ясно видим, что других вариантов нет. Только ноль удовлетворяет условиям поставленной задачи и является единственным ее решением! Таким образом, я полностью решил вашу задачу, уважаемый Профессор.

П р о ф е с с о р. Я с интересом следил за вашими рассуждениями. Особенно мне понравилось последнее замечание Зануды. Вместе с тем, должен объявить вам, что вы решили не ту задачу, которую я сформулировал. Моя задача решается с помощью уравнения

$$x/3 = 1/2,$$

откуда очевидно следует единственное его решение $x = 3/2$.

Предупреждая ваши возможные недоумения, сразу скажу, что слово "половина" обозначает число 1/2 (т. е. 0,5). Обратите внимание, в задаче не говорилось о половине *чего-то*. Таким образом, требовалось найти числа, треть которых равна просто числу 1/2. Вы же решали задачу не в моей, а в следующей формулировке: каковы числа, треть от которых равна *их* половине? Впредь будьте внимательны при чтении формулировок задач. Естественный язык, на котором мы говорим, позволяет красочно, объемно и лаконично выражать мысли. Вопрос в том, насколько точно та или иная мысль выражена, и однозначно ли она понимается. Недаром говорится, что "мысль изреченная есть ложь". Рассмотренная нами задача относится к головоломкам не потому, что ее трудно решить, а потому, что ее формулировка предполагает некоторую неоднозначность интерпретации. Многие головоломки и почти все анекдоты строятся в расчете на то, что "исходные данные" будут неверно проинтерпретированы из-за невнимательности. Вспомните детскую загадку: А и Б сидели на трубе, А упало, Б пропало, что осталось на трубе? Большинство из нас легко обнаружило, что здесь речь идет о двух объектах, А и Б, а буква "и" является элементом синтаксиса предложения (союзом). Однако допустима и другая интерпретация: "и" обозначает некоторый объект, подобно буквам "А" и "Б".

1.1.2. Когда родился Иван?

П р о ф е с с о р. В 1975 году некто по имени Иван сказал, что ему было n лет в n^2 году. В каком году он родился?

П р о с т а к. Составим уравнение:

$$x + n = n^2,$$

где x — искомый год, в котором родился Иван.

В одном уравнении два неизвестных. Это плохо, но обнадеживает то, что величины n и x ограничены:

$$0 < n < 150;$$

$$x + n \leq 1975.$$

З а н у д а. Я бы ограничил n еще больше, например, так: $0 < n < 120$, хотя навряд ли Ивану могло быть 120 лет. Впрочем, есть же долгожители и постарше. А теперь надо, начиная примерно с года $x = 1855$, перебрать различные сочетания x и n, пока не получится равенство $x + n = n^2$.

П р о с т а к. Можно обойтись без перебора, пусть и ограниченного, но все же очень большого количества вариантов. Обратите внимание, что n^2 должно быть не больше 1975 и не слишком далеко от этого значения.

Из того, что $n^2 \le 1975$, следует $n \le \sqrt{1975} \approx 44{,}4$. Возьмем ближайшее меньшее целое число $n = 44$. Тогда $n^2 = 1936$ и $x = n^2 - n = 1936 - 44 = 1892$. Итак, Иван родился в 1892 году.

З а н у д а. А может быть, есть и другие подходящие значения x и n?

П р о с т а к. Проверим еще одно, следующее, значение $n = 43$. Для него получается $n^2 = 1849$ и $x = 1849 - 43 = 1805$. Но тогда в 1975 году Ивану было бы 170 лет. Кажется, в XX веке таких долгожителей не было, поэтому данный вариант следует отбросить.

Если мы возьмем для пробы $n = 42$, то попадем в XVIII век, поскольку $n^2 = 1754$. Итак, ясно, что условиям нашей задачи отвечает только один вариант.

П р о ф е с с о р. Замечательно. Вот видите, вы обошлись без перебора большого количества вариантов, стоило только немного поразмышлять.

1.1.3. Необычная арифметика

П р о ф е с с о р. Мы все еще со школы знаем основные арифметические операции, такие как сложение, вычитание, умножение и деление чисел. Как и сами числа, эти операции возникли из опыта. Несколько предметов можно считать неразличимыми с некоторой точки зрения и тогда можно подсчитать их общее количество. Например, столы, стулья, диваны и другие предметы обстановки образуют совокупность, называемую одним словом "мебель". Хотя эти предметы могут заметно отличаться друг от друга, мы пренебрегаем этими различиями, подсчитывая их общее количество. Если, скажем, у вас уже есть 2 яблока, а я даю вам еще одно, то вы без особых затруднений сможете вычислить, что теперь у вас стало 3 яблока. При этом вы не обращаете внимания на различия сортов и размеров яблок. Вы просто сопоставляете совокупности различных предметов число — их общее количество.

Объединяя две совокупности, мы применяем операцию сложения чисел, чтобы определить количество предметов в объединении. Выделяя из данной совокупности часть предметов, мы применяем операцию вычитания. Я хочу сказать, что таким действиям над предметами, как образование из них совокупностей, последующее слияние или разъединение этих совокупностей, соответствуют арифметические операции над числами, и наоборот. Но всегда ли это верно? Так, например: смешав 1 литр воды с 1 литром спирта, мы получим не 2, а 1,8 литра спиртового раствора; смешав два равных объема воды — один при температуре 40°, а другой при температуре 60° по шкале Цельсия, — мы не получим удвоенного объема при температуре 100°; соединив в электрической цепи параллельно два резистора с сопротивлениями R1 и R2, получим общее сопротивление R1R2 / (R1 + R2), а не R1 + R2. Итак, мы видим, что операции прибавления (соединения), выполняемой над предметами, не всегда соответствует арифметическая операция сложения соответствующих чисел.

Простак. Очевидно, что арифметические операции нельзя применять к практическим задачам столь прямолинейно. Интерпретация, например, сложения как смешение жидкостей слишком груба, а потому и не приводит к правильным результатам.

Профессор. Очень справедливое замечание! Однако давайте рассмотрим следующую задачу.

Продавец ведет учет эффективности своей торговли, вычисляя отношение количества посетителей магазина, сделавших покупки, к их общему количеству. Например, если за день из пяти посетителей только трое что-то купили, то эффективность торговли в этот день оценивается величиной 3/5. Такое отношение продавец вычисляет каждый день и желает оценить эффективность своей работы сразу за несколько дней. Допустим, в первый день эффективность равна 3/5, а во второй — 7/9. Какова суммарная эффективность торговли за два дня?

Простак. Надо просто сложить дневные эффективности:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{9}=\frac{3\times 9+7\times 5}{5\times 9}=\frac{62}{45}.$$

Зануда. Получается, что за два дня магазин посетили 45 человек, из которых 62 сделали покупки. Какая-то несуразность!

Простак. Я и сам вижу, что это абсурд, и готов исправиться: *суммарная эффективность — это среднее значение дневных эффективностей*, а не просто их сумма. Если требуется найти среднее значение нескольких величин, то их следует сначала сложить, а полученную сумму разделить на количество этих величин. Поэтому средняя эффективность равна

$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{9}}{2}=\frac{31}{45}\approx 0{,}6889.$$

Зануда. Я все равно не согласен с Простаком. За два дня магазин посетили 5 + 9 = 14 покупателей и только 3 + 7 = 10 из них что-то купили. Следовательно, средняя эффективность торговли за два дня равна совсем другой величине:

$$\frac{3+7}{5+9}=\frac{10}{14}\approx 0,7143.$$

Иначе говоря, средняя или суммарная эффективность вычисляется не путем сложения дробей, а как дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель — сумме знаменателей этих частных дробей.

Профессор. Итак, обычная арифметическая сумма двух дробей определяется по формуле:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1\times b_2+a_2\times b_1}{b_1\times b_2}.$$

А Зануда придумал новую операцию сложения двух дробей, которую мы обозначим как $\oplus$, чтобы отличить ее от обычной операции $+$ сложения чисел:

$$\frac{a_1}{b_1}\oplus\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}.$$

Простак. Хотя метод, предложенный Занудой, и кажется обоснованным, я все же не вижу причин отказываться от своего способа. Но наши способы дают различные результаты. Так какой же из двух методов правильный?

Профессор. В поисках ответа на этот вопрос давайте рассмотрим еще одну задачу, очень похожую на задачу об эффективности торговли.

Допустим, автомобиль первую сотню километров проехал за 2 часа, а вторую сотню — за 8 часов. С какой средней скоростью автомобиль проехал всю дистанцию длиной 200 км?

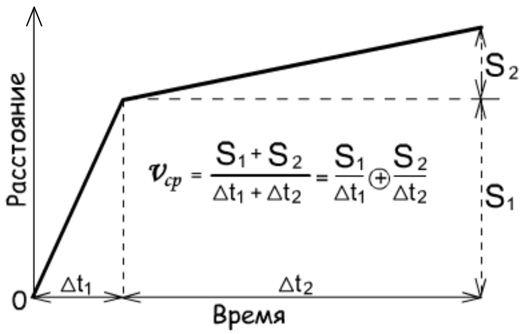
Очевидно, что автомобиль ехал неравномерно: на различных участках пути он имел различные скорости. Нас интересует *средняя скорость, которая есть скорость равномерного движения, при которой автомобиль проедет то же расстояние и за то же время, что и при неравномерном движении*. Тогда в рассматриваемом случае средняя скорость автомобиля равна 20 км/ч. Действительно, с этой скоростью он за 10 часов пройдет весь путь длиной 200 км.

Если бы мы взяли среднее арифметическое скоростей на двух участках, то получили бы неверное значение:

$$\frac{\frac{100}{2}+\frac{100}{8}}{2}=31,25.$$

С такой скоростью за 10 часов автомобиль прошел бы не 200, а 312,5 км. Правильное значение 20 км/ч средней скорости получается с помощью операции

$$\frac{100}{2} \oplus \frac{100}{8} = \frac{100+100}{2+8} = 20.$$



Теперь рассмотрим более общий случай неравномерного движения. Пусть участки пути S_1, S_2, ..., S_n автомобиль проходит за время Δt_1, Δt_2, ..., Δt_n соответственно. Очевидно, скорость на i-м участке равна S_i / Δt_i. Определим *среднюю скорость на всем пути как взвешенную сумму всех скоростей на отдельных участках*. Это означает, что суммируемые величины скоростей должны быть предварительно умножены на так называемый весовой коэффициент, равный доле общего времени, в течение которого автомобиль двигался с данной скоростью. Временнáя доля i-го участка составляет величину Δt_i / T, где $T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n$ — общее время в пути. Таким образом, чем меньше по времени автомобиль двигался с данной скоростью, тем меньше вес этой скорости в сумме всех скоростей на отдельных участках, и наоборот. Очевидно, что каждый весовой коэффициент принимает значения в интервале от 0 до 1, а сумма всех таких коэффициентов равна 1.

Итак, взвешенная сумма всех скоростей на отдельных участках равна

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} \times \frac{\Delta t_1}{T} + \frac{S_2}{\Delta t_2} \times \frac{\Delta t_2}{T} + ... + \frac{S_n}{\Delta t_n} \times \frac{\Delta t_n}{T} =$$

$$= \frac{S_1 + S_2 + ... S_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n} = \frac{S_1}{\Delta t_1} \oplus \frac{S_2}{\Delta t_2} \oplus ... \oplus \frac{S_n}{\Delta t_n}.$$

Таким образом, мы приходим к применению операции $\oplus$ и при более сложном определении средней скорости, которое в конце концов сводится к исходному: средняя скорость равна отношению расстояния к общему времени, затраченному на его прохождение. С другой стороны, это — среднее расстояние, проходимое в единицу времени, или, как еще говорят, среднее расстояние в расчете на единицу времени.

Теперь, полагаю, вам нетрудно будет определить и среднюю эффективность торговли.

П р о с т а к. Средняя эффективность торговли аналогична средней скорости движения в пространстве. Ее можно понимать как среднее количество покупателей в расчете на одного посетителя магазина. Тогда правильной будет формула, предложенная Занудой:

$$\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2}{b_2} \oplus ... \oplus \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

П р о ф е с с о р. Я согласен с Вами, Простак.

З а н у д а. Если я правильно понял, для решения задач о средней эффективности и скорости, а может быть и каких-то других, мы используем новую операцию $\oplus$ сложения чисел, а значит, и новую арифметику.

П р о ф е с с о р. Операция сложения $\oplus$ существенно отличается от обычной операции сложения чисел. Прежде всего, операция $\oplus$ была определена для дробей. Разумеется, любое целое число a можно представить в виде дроби $a/1$. В обычной арифметике выполняется равенство $a + b = a/1 + b/1$, а в новой оно нарушается: $a/1 \oplus b/1 = (a + b)/2$. Таким образом, операция $\oplus$, применяемая к двум целым числам, дает в результате их среднее арифметическое.

В обычной арифметике дроби можно сокращать, т. е. делить числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля; при этом результат будет тем же самым числом. Заметим, что дробь в виде отношения a/b еще интерпретируют как отложенное деление числа a на число b. Например, дроби 2/3 и 4/6 выражают одно и то же число, которое в десятичной записи имеет вид 0,666… . В обычной арифметике число (2/3 + 1/4) равно числу (4/6 + 1/4), а в новой арифметике ($2/3 \oplus 1/4$) и ($4/6 \oplus 1/4$) — различные числа.

Таким образом, новая арифметика более специфична и более сложна, чем обычная. Тем не менее, вводя операции, отличные от обычных, мы можем прийти к арифметике, применимой к реальным явлениям. Производимые над числами операции выбираются так, чтобы они соответствовали некоторому интересующему нас классу явлений физического мира. Только опыт может подсказать нам, в каких случаях обычная арифметика применима к тому или иному явлению. Следовательно, мы не можем рассматривать арифметику как свод истин, применимых для описания любых физических явлений. Это заключение относится и к любым новым арифметикам. На эти вопросы в XIX веке обратил внимание выдающийся немецкий естествоиспытатель и математик Г. Гельмгольц.

1.1.4. Параллельная работа с разными производительностями

Профессор. Рассмотрим еще одну задачу, в которой общую работу делают несколько человек, но у каждого своя производительность, или скорость. Допустим, одна секретарша перепечатывает рукопись за 2 часа, а другая — за 3. Весь объем работы можно как-то поделить между секретаршами. Тогда за какое время они перепечатают всю рукопись, если будут работать вместе?

Простак. Я думаю, что им понадобится больше трех часов.

Зануда. Как же так? Одна из них помогает другой, следовательно, время совместной работы будет меньше наименьшего из двух данных времен.

Простак. Дело в том, что секретарши наверняка будут болтать друг с другом, из-за чего их производительность и снизится почти до нуля.

Шучу, конечно. Вопрос, я думаю, в том, чтобы правильно разделить между секретаршами объем работы. Очевидно, делить пополам не стоит, т. к. более производительная секретарша закончит свою часть работы раньше и будет "простаивать". Следовательно, если ей дать объем работы побольше, то удастся сократить общее время перепечатки всей рукописи. Так что более производительной секретарше надо дать бóльшую часть рукописи. Если обозначить объем работы (например, количество листов рукописи) для более производительной секретарши через x_1, а для менее производительной — через x_2, то отношение этих величин должно быть обратно пропорционально значениям времени, затрачиваемого ими на работу:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}.$$

Зануда. Хотя гипотеза о том, что должна выполняться данная пропорция, и разумна, она все же остается гипотезой, причем недостаточно обоснованной. А мне бы не хотелось начинать с каких-то, пусть даже правдоподобных, предположений.

Что мы имеем в качестве исходных данных? А то, что некий объем работы (обозначим его через x) первая секретарша выполняет со скоростью x/t_1, а вторая — со скоростью x/t_2, где $t_1 = 2$, а $t_2 = 3$.

Пусть первой секретарше поручили выполнить объем работы x_1, а второй — x_2. Чтобы найти время, затрачиваемое на выполнение работы, надо объем этой работы разделить на скорость (производительность). Далее, когда совместная работа двух секретарш завершится, обе они затратят на это одинаковое время. Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\frac{x_1}{x/t_1} = \frac{x_2}{x/t_2}.$$

П р о с т а к. Нетрудно заметить, что полученное Занудой равенство легко приводится к моему, сформулированному как гипотеза. Так что я был прав!

З а н у д а. Пусть так. Но теперь это равенство вполне обоснованно. Кроме того, оно содержит нужную мне переменную x, которая обозначает теперь весь объем работы.

П р о с т а к. Однако ее можно сократить.

З а н у д а. Можно, но не нужно. Дело в том, что я введу еще одно очевидное равенство:

$$x_1 + x_2 = x.$$

П р о с т а к. Теперь у нас два равенства, но три неизвестных: x_1, x_2 и x. Ничего хорошего в этом я не вижу.

З а н у д а. Позвольте мне продолжить. Итак, у нас есть следующие два равенства, легко получаемые из приведенных ранее с помощью элементарных преобразований:

$$\frac{x_1 t_1}{x} = \frac{x_2 t_2}{x};$$

$$\frac{x_1}{x} + \frac{x_2}{x} = 1.$$

Но что нам требуется найти по условию задачи? А лишь значение левой или правой части первого из равенств, поскольку они выражают время, затраченное на совместную работу. Напомню, что обе секретарши, работая вместе, затрачивают на работу одинаковое время. Так что из двух уравнений требуется сначала найти, например, x_1/x, а затем умножить это значение на t_1.

В результате этих манипуляций получим время, за которое будет напечатана рукопись параллельно работающими секретаршами:

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1{,}2.$$

Профессор. Что ж, решение верно, хотя и путь к нему не был коротким. Попробуем сократить его, используя другую модель ситуации.

Представьте себе, что секретарши печатают рукописи, так сказать, в противоположных направлениях. Одна из них начинает с первой страницы, а другая — с последней. Если они печатают на компьютере, то такое вполне осуществимо. Разумеется, производительности секретарш не одинаковы, работа в различных направлениях идет с разной скоростью. Но с какой скоростью продвигается работа в целом?

Простак. Я, кажется, понял, что надо делать! Пусть x — общий объем работы (все расстояние, которое требуется пройти). Секретарши работают со скоростями x/t_1 и x/t_2. С точки зрения первой секретарши, работа идет с суммарной скоростью $x/t_1 + x/t_2$. С такой же скоростью продвигается работа и с точки зрения второй секретарши. Именно с суммарной скоростью растет пачка уже напечатанных страниц, а это и есть скорость совместной работы. В какой-то момент все страницы будут напечатаны. Это произойдет спустя время t_0 после начала совместной работы. Скорость совместной работы двух секретарш есть x/t_0.

Составим уравнение

$$\frac{x}{t_0} = \frac{x}{t_1} + \frac{x}{t_2},$$

откуда, сокращая попутно левую и правую части на x, получаем время совместной работы

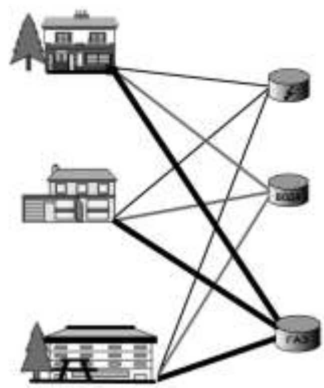
$$t_0 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Профессор. Вот видите, немного изменили взгляд на задачу, выбрали другую модель — и решение оказалось более простым!

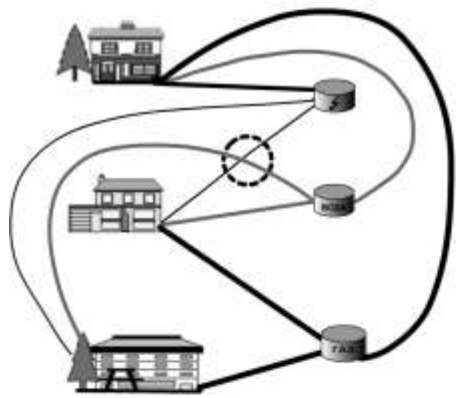
1.2. Геометрическая задача: обустройство дач

П р о ф е с с о р. Теперь рассмотрим задачу, связанную с геометрией. Пусть в дачном поселке слева от дороги находятся три дома, а справа — три колодца с коллекторами (водопроводным, электрическим и газовым). Требуется каждый дом соединить с каждым коллектором, но так, чтобы траншеи с линиями соединений из соображений безопасности не пересекались. Как это сделать?

П р о с т а к. Придется повозиться с чертежами. Похоже, соединительные линии не могут быть прямыми, поскольку при первом рассмотрении прямые линии пересекаются. Если же линии сделать извилистыми, то для всех линий, кроме двух, задачу решить легко, применяя обводки. Но вот развести эти оставшиеся две линии не получается. Мне кажется, что эту задачу вообще нельзя решить.



П р о ф е с с о р. Некоторые задачи могут не иметь решения, но в таких случаях это необходимо доказать. Иначе вы можете только утверждать, что вам пока не удалось найти решения из-за недостатка времени, знаний, ума или еще чего-нибудь.



З а н у д а. Да, я слышал, что графы (множество точек, соединенных линиями) могут иметь или не иметь так называемое свойство планарности. У планарного графа, расположенного в одной плоскости, соединительные линии не пересекаются. Планарные графы применяются при разработке печатных плат для электронных устройств. Действительно, нельзя допустить, чтобы неизолированные проводники электрического тока пересекались. Так что надо доказать возможность построения соответствующего нашей задаче графа, обладающего свойством планарности. Или, наоборот, доказать, что